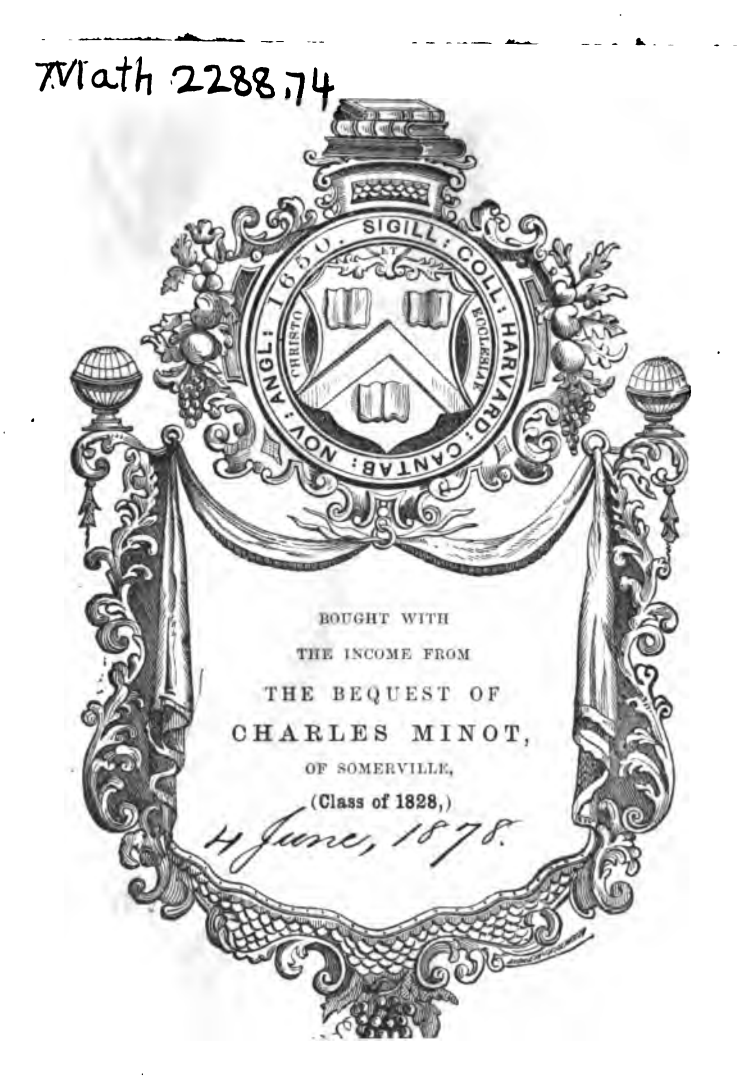
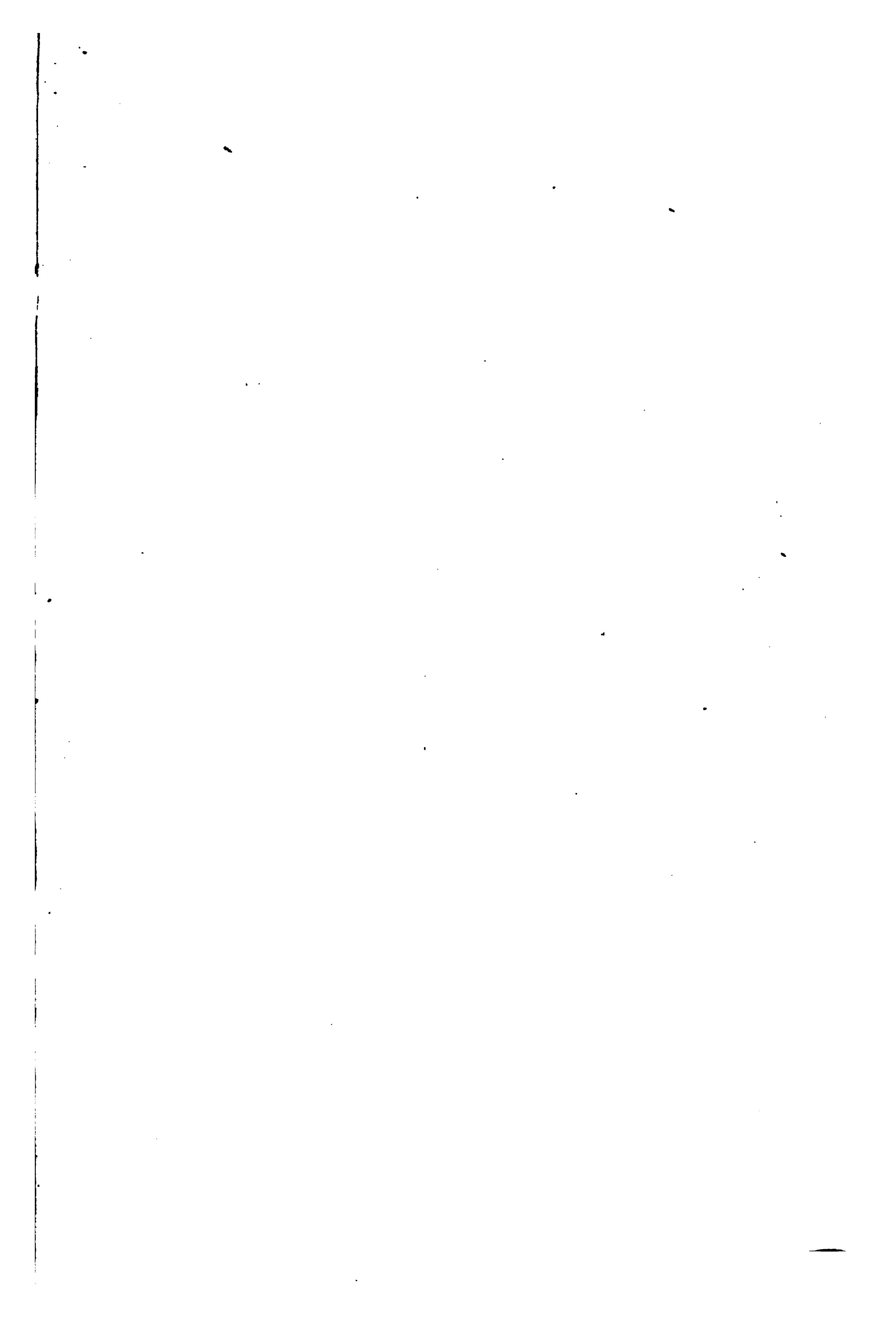

SIGILL : COLL : HARVARD : CANTAB : NOV : ANGL : 1650
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
CHARLES MINOT,
OF SOMERVILLE,
(Class of 1828,)
4 June, 1878.



DIE STURM'SCHEN FUNCTIONEN.

DIE

STURM'SCHEN FUNCTIONEN.

VON

KARL HATTENDORFF, DR. PHIL.,
PROFESSOR AN DER POLYTECHNISCHEN SCHULE IN AACHEN.

ZWEITE AUFLAGE.

HANNOVER.
CARL RÜMPLER.
1874.

Druck von August Grimpe in Hannover.

Vorrede.

Diese Schrift über die Sturm'schen Functionen habe ich ursprünglich im Wintersemester $18^{61}/_{62}$ der philosophischen Facultät der Universität Göttingen bei meiner Meldung zum Doctor-Examen eingereicht. Sie ist dann nach erfolgter Promotion im Jahre 1862 als Inaugural-Dissertation gedruckt und veröffentlicht. Nachdem die erste Auflage vergriffen, hat die Nachfrage nicht aufgehört, und ich will nicht leugnen, daß es mir Freude gemacht hat, wiederholt zu der Veranstaltung einer zweiten Auflage aufgefordert zu werden. Ich denke bei der Veröffentlichung dieser zweiten Auflage weniger an die Meister der Wißenschaft als an ihre Jünger. Ich bin zufrieden, wenn die Schrift in ihrer neuen Gestalt dem Studirenden nicht unwillkommen ist, wenn die systematische Verarbeitung des Materials ihn auf das Studium der Original-Abhandlungen vorbereitet und ihm dadurch die Quellen zugänglicher macht.

Im allgemeinen ist an dem Inhalte der ersten Auflage wenig geändert. Nur wo eine einfachere Darstellung zuläßig (§. 5) oder eine präcisere Entwicklung wünschenswert erschien (§§. 11 und 19), habe ich Änderungen vorgenommen. Daß die neueren Untersuchungen von Kronecker und Brioschi nicht übergangen werden durften, versteht sich von selbst. Sie haben in §. 21, III. IV. V. Aufnahme gefunden, soweit sie in den Rahmen dieser Schrift sich einfügen ließen. Außerdem ist noch zu be-

sonderem Studium die größere Abhandlung zu citiren, welche Herr Professor Kronecker in dem Monatsberichte der Berliner Akademie vom Februar 1873 veröffentlicht hat. Zum Schluß darf ich wohl auf die eigene Zugabe hinweisen, welche in den §§. 12 bis 16 enthalten ist.

Wo Baltzer's Determinanten citirt sind, ist die 3. Auflage gemeint.

Aachen, den 7. März 1874.

K. Hattendorff.

Inhalt.

Die Aufsuchung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung besteht in der Lösung der beiden Aufgaben, die Wurzeln zu trennen und, nachdem dies geschehen, ihre Werte zu berechnen. Die erste dieser Aufgaben ist bei weitem die wichtigere. Denn, ist sie gelöst, so erleidet die Berechnung der Wurzelwerte bis zu einem beliebigen Grade der Präcision keine Schwierigkeit. Die Theorie gibt dafür Methoden, die allgemein und sicher zum Ziele führen. Die Trennung der Wurzeln nimmt daher das Hauptinteresse in Anspruch. Eine reelle Wurzel ist von den übrigen getrennt, wenn man zwei reelle Zahlen h und h_1 angeben kann, so daß zwischen ihnen nur jene eine Wurzel liegt. Eine complexe Wurzel ist von den übrigen getrennt, wenn man vier reelle Zahlen h, h_1, k, k_1 angeben kann, so daß nur jene eine Wurzel innerhalb eines Rechteckes liegt, dessen Eckpunkte (nach der von Gauß gegebenen Darstellung der complexen Zahlen) durch die Zahlen $h + k\sqrt{-1}$, $h_1 + k\sqrt{-1}$, $h_1 + k_1\sqrt{-1}$, $h + k_1\sqrt{-1}$ gebildet werden. Für die Trennung der reellen Wurzeln sind besonders drei verschiedene Methoden angegeben, von Lagrange, von Fourier und von Sturm.*)

Lagrange bildet eine Hülfsgleichung, welche die quadrirten Differenzen von je zwei Wurzeln der ursprünglichen Gleichung zu Wurzeln hat, und sucht eine Zahl α, die kleiner als die kleinste Wurzel dieser neuen Gleichung ist. Läßt man dann die Variable x von der untern bis zu der obern Grenze der reellen Wurzeln der ursprünglichen Gleichung alle um $\sqrt{\alpha}$ von einander verschiedenen Werte durchlaufen, so kann zwischen zwei benachbarten Werten höchstens eine Wurzel liegen. Dies ist der Fall, wenn das Polynom der Gleichung für jene beiden benachbarten Werte von x entgegengesetzte Vorzeichen annimmt. Theoretisch ist gegen dies Verfahren nichts einzuwenden, es ist streng und allgemein gültig. In der Praxis aber kann es, ganz abgesehen von der stets sehr mühsamen

*) Die von Cauchy angegebene Methode zur Trennung der complexen Wurzeln soll hier nicht in den Kreis der Betrachtung gezogen werden, da die Aufsuchung der complexen Wurzeln auf die Berechnung der reellen Wurzeln von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten sich zurückführen läßt.

Bildung der Hülfsgleichung, dann völlig unausführbar werden, wenn die kleinste Differenz der Wurzeln ein sehr kleiner Bruch ist.

Die Methode Fourier's gibt nur zu erkennen, wie viel Wurzeln höchstens zwischen zwei gegebenen reellen Zahlen liegen. Sie löst also die Aufgabe nur unvollständig.

Sturm dagegen hat zuerst eine Reihe von Functionen aufgestellt, aus deren Vorzeichen stets mit Sicherheit sich ergibt, ob und wie viel Wurzeln zwischen zwei gegebenen reellen Zahlen liegen. Die — wenn auch mühsame — Herstellung dieser Functionen bildet eine vollständige und immer ausführbare Lösung des Problems. Daher hat sie seit der ersten von Sturm gegebenen Anregung den Gegenstand der eifrigsten Betrachtung abgegeben und eine reichhaltige Literatur hervorgerufen. Die wichtigsten darauf bezüglichen Untersuchungen sollen hier im Zusammenhange und übersichtlich dargestellt werden.

§. 1.

Es sei

$$F(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_{m-1} x + a_m \tag{1}$$

eine algebraische, rationale, ganze Function $m$ten Grades von x mit reellen Coefficienten, $F'(x) = \frac{dF}{dx}$ bezeichne ihren ersten Differential-Quotienten, und beide seien nach abnehmenden Potenzen von x geordnet.

Wir leiten aus $F(x)$ und $F'(x)$ die Sturm'schen Functionen ab, welche durch das folgende System von Gleichungen definirt werden:

$$\begin{aligned}
F(x) &= q_1 . F'(x) - F_2(x) \\
F'(x) &= q_2 . F_2(x) - F_3(x) \\
F_2(x) &= q_3 . F_3(x) - F_4(x) \\
&\dots\dots\dots \\
F_{n-2}(x) &= q_{n-1} . F_{n-1}(x) - F_n(x) \\
&\dots\dots\dots \\
F_{r-1}(x) &= q_r . F_r(x). \qquad (r \leqq m)
\end{aligned} \tag{2}$$

Dabei ist q_1 der aus der Division von $F(x)$ durch $F'(x)$ entstehende ganze Quotient, lineär in Beziehung auf x, und $F_2(x)$ der mit entgegengesetzten Vorzeichen genommene Rest, im allgemeinen vom Grade $m-2$. Ebenso ergibt sich q_2 als der ganze Quotient bei der Division von $F'(x)$ durch $F_2(x)$, und $F_3(x)$ ist der mit entgegengesetzten Vorzeichen genommene Rest, im Grade mindestens um 1 geringer als $F_2(x)$. Allgemein ist $F_{n-1}(x)$ im Grade mindestens um 1 niedriger als $F_{n-2}(x)$, die Division von $F_{n-2}(x)$ durch $F_{n-1}(x)$ gibt als (mindestens) lineären ganzen Quotienten q_{n-1}, und der Rest $-F_n(x)$ ist im Grade mindestens um 1 nie-

driger als $F_{n-1}(x)$. Zunächst soll vorausgesetzt werden, daß wirklich in der Reihe

(3) $$F(x),\quad F'(x),\quad F_2(x),\ \ldots\ F_r(x)$$

jede Function im Grade um 1 niedriger ist als die vorhergehende und um 1 höher als die folgende. Die Anzahl der Functionen ist dann $r+1$, die letzte $F_r(x)$ ist vom Grade $m-r$, also, wenn $r=m$ ist, eine von x unabhängige Constante. Die Quotienten $q_1, q_2, \ldots q_r$ sind sämmtlich lineäre Functionen von der allgemeinen Form $q_n = \beta_n x + \beta_n'$.

Die Gleichung $F(x)=0$ habe zunächst nur ungleiche Wurzeln. Unter dieser Voraussetzung ist $r=m$ und die letzte Function $F_r(x)$ [der größte gemeinschaftliche Divisor von $F(x)$ und $F'(x)$] eine von 0 verschiedene Constante. Die Gleichungen (2) ergeben dann die folgenden charakteristischen Eigenschaften der Sturm'schen Functionen.

1. Für denselben Wert von x können nicht zugleich zwei benachbarte Functionen zu Null werden. Denn sonst müßten alle übrigen Functionen, auch die letzte, ebenfalls mit verschwinden, was der Voraussetzung widerspricht.

2. Verschwindet eine der mittleren Functionen, etwa $F_n(x)$, so haben $F_{n-1}(x)$ und $F_{n+1}(x)$ entgegengesetzte Vorzeichen. Daher kann die Zeichenreihe der Functionen $F(x)$, $F'(x)$, $F_2(x), \ldots F_r(x)$ in der Anzahl der Zeichenwechsel und der Zeichenfolgen keine Änderung erleiden, wenn die Variable x beim Durchlaufen der reellen Zahlenreihe stetig wachsend durch einen Wert hindurchgeht, der eine oder mehrere der mittleren Functionen, nicht aber $F(x)$ annullirt.

3. Ist $F(x_1)=0$, so läßt sich die positive Zahl α so klein wählen, daß zwischen $x=x_1-\alpha$ und $x=x_1+\alpha$ die Function $F'(x)$ ihr Zeichen nicht ändert. Für die Vorzeichen von F und F' gilt dann eins der folgenden Schemata:

	F	F'		F	F'
$[x_1-\alpha]$	$+$	$-$		$-$	$+$
$[x_1]$	0	$-$	oder	0	$+$
$[x_1+\alpha]$	$-$	$-$		$+$	$+$

d. h. wenn $F(x_1)=0$ ist, so hat der Quotient $\dfrac{F(x_1-\alpha)}{F'(x_1-\alpha)}$ negatives, der Quotient $\dfrac{F(x_1+\alpha)}{F'(x_1+\alpha)}$ positives Vorzeichen.

Sind aber unter den Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_m$ der Gleichung $F(x)=0$ die Wurzeln $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots x_m$ irgend welche Wiederholungen der unter einander verschiedenen $x_1, x_2, \ldots x_r$, so besitzen die sämmtlichen Sturm'schen Functionen den gemeinschaftlichen Divisor $(x-x_{r+1})(x-x_{r+2})\ldots(x-x_m)$, so daß

$$\begin{aligned}
F(x) &= (x - x_{r+1})(x - x_{r+2}) \dots (x - x_m)\, T \\
F'(x) &= (x - x_{r+1})(x - x_{r+2}) \dots (x - x_m)\, T_1 \\
F_2(x) &= (x - x_{r+1})(x - x_{r+2}) \dots (x - x_m)\, T_2 \\
&\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\
F_r(x) &= (x - x_{r+1})(x - x_{r+2}) \dots (x - x_m)\, T_r
\end{aligned}$$

und $T_r = const.$ ist. Die Gleichungen (2) bleiben dann gültig, wenn man statt der Functionen $F, F', F_2, \dots F_r$ die Functionen $T, T_1, T_2, \dots T_r$ an die Stelle setzt. Daraus folgt, daß auch die Sätze 1. und 2. für diese Functionen T, die wir die reducirten Sturm'schen Functionen nennen wollen, ihre Gültigkeit behalten. Der Satz 3. ist für sie leicht zu beweisen. Die Gleichung $T = 0$ hat nemlich dieselben Wurzeln, wie die Gleichung $F = 0$, aber jede nur einfach. Ist $x = x_k$ eine εfache Wurzel von $F = 0$, also $F(x) = (x - x_k)^\varepsilon . f(x)$, so findet sich:

$$\frac{T}{T_1} = \frac{F}{F'} = \frac{x - x_k}{\varepsilon + (x - x_k)\dfrac{f'(x)}{f(x)}},$$

oder für $x = x_k \pm \alpha$:

$$\frac{T}{T_1} = \frac{F}{F'} = \frac{\pm \alpha}{\varepsilon \pm \alpha \dfrac{f'(x)}{f(x)}}.$$

Es läßt sich aber α so klein wählen, daß der Nenner $\varepsilon \pm \alpha \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ stets das Vorzeichen von ε hat, d. h. positiv ist. Folglich ist der Quotient $\dfrac{T}{T_1}$ negativ für $x = x_k - \alpha$ und positiv für $x = x_k + \alpha$.*)

---

*) Hat man die Wurzel $x = x_k$ der Gleichung $F(x) = 0$ aufgefunden, so bleibt noch zu bestimmen, wie vielfach sie ist. Es bezeichne T' den ersten Differential-Quotienten $\dfrac{dT}{dx}$ von T. Dann ist

$$T = (x - x_k) . t(x),$$

also

$$\frac{T}{T'} = \frac{x - x_k}{1 + (x - x_k)\dfrac{t'(x)}{t(x)}}.$$

Eliminirt man T aus den beiden Gleichungen, welche $\dfrac{T}{T_1}$ und $\dfrac{T}{T'}$ ausdrücken, so ergibt sich

$$\frac{T_1}{T'} = \frac{\varepsilon + (x - x_k)\dfrac{f'(x)}{f(x)}}{1 + (x - x_k)\dfrac{t'(x)}{t(x)}},$$

und daher für $x = x_k$:

$$\frac{T_1}{T'} = \varepsilon.$$

Die Zeichenreihe der Functionen F, F', F_2, ... F_r hat aber stets ebenso viel Zeichenwechsel und Zeichenfolgen, wie die Zeichenreihe der Functionen T, T_1, T_2, ... T_r, da der gemeinschaftliche Factor $(x - x_{r+1})(x - x_{r+2}) \ldots (x - x_m)$ die Zeichen nicht alterirt, wenn er positiv ist, dagegen alle Vorzeichen in die entgegengesetzten verwandelt, wenn er negativ ist.

Hiernach laßen sich für die Zeichenreihe der Sturm'schen Functionen und für die der reducirten Sturm'schen Functionen die folgenden Sätze aufstellen.

I. Die Zeichenreihe verliert stets und nur dann einen Zeichenwechsel, wenn die Variable beim Durchlaufen der reellen Zahlenreihe stetig wachsend durch einen Wurzelwert der Gleichung $F(x) = 0$ hindurchgeht.

II. Sind a und b reelle Zahlen und $a < b$, so kann die Zeichenreihe für $x = b$ nicht mehr Zeichenwechsel haben als für $x = a$. So viel Zeichenwechsel für $x = b$ weniger vorhanden sind als für $x = a$, so viel verschiedene reelle Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ liegen zwischen a und b. (Sturm's Lehrsatz.)

Für $x = \pm\infty$ nimmt jede Function das Vorzeichen ihres ersten Gliedes an, wonach sich die Herstellung der Zeichenreihen für $-\infty$ und $+\infty$ wesentlich vereinfacht.

Ist die Reihe der Functionen vollzählig (ihre Anzahl $r+1$), also der Grad derselben abwechselnd gerade und ungerade, so hat die Gleichung $F(x) = 0$ so viel verschiedene Paare complexer Wurzeln, als Zeichenwechsel in der Reihe der ersten Coefficienten der Functionen vorhanden. Denn diese Reihe bildet die Zeichenreihe für $x = +\infty$. Die Anzahl der Zeichenwechsel darin sei p. Für $x = -\infty$ sind dann $r - p$ Zeichenwechsel vorhanden, da jedem Zeichenwechsel für $[-\infty]$ eine Zeichenfolge für $[+\infty]$ entspricht. Die Anzahl der verschiedenen reellen Wurzeln ist demnach $r - 2p$, die der complexen $2p$. Man sieht zugleich, daß die Reihe der ersten Coefficienten der Sturm'schen Functionen höchstens $\frac{r}{2}$ Zeichenwechsel haben kann.

Ist in den Gleichungen (2) $F'(x)$ nicht $= \frac{dF}{dx}$, sondern eine beliebige rationale, ganze Function $(m-1)$ten Grades, so bleiben allerdings die Sätze 1. und 2. für die reducirten Functionen gültig, der Satz 3. dagegen nur dann, wenn $F'(x)$ für alle reellen Wurzelwerte von $F(x) = 0$ dasselbe Vorzeichen hat wie $\frac{dF}{dx}$. Alsdann behält auch der Sturm'sche Satz seine Richtigkeit.*)

*) Sturm, Mémoire sur la résolution des équations numériques. (Mémoires présentés par divers savans à l'Académie Royale des Sciences. T. 6, p. 271.)

§. 2.

Die Gleichung $F(x) = 0$ habe r unter einander verschiedene Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_r$, von denen die übrigen $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots x_m$ irgend welche Wiederholungen bilden, so daß $F(x) = (x - x_{r+1})(x - x_{r+2}) \ldots (x - x_m)\, T$ und $T = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_r)$ ist. Diese Voraussetzung begreift auch den Fall in sich, daß alle Wurzeln verschieden sind, da alsdann $r = m$ und $\frac{F}{T} = 1$ zu setzen ist. Wir nehmen

$$F_1(x) = (x - x_{r+1})(x - x_{r+2}) \ldots (x - x_m)\, T_1$$

und verstehen unter T_1 vorläufig eine beliebige rationale, ganze Function $(r-1)$ten Grades mit reellen Coefficienten, die zu T relativ prim ist.

Aus den Gleichungen (2) geht der folgende Kettenbruch hervor:

$$\frac{F(x)}{F_1(x)} = \frac{T}{T_1} = q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \cfrac{1}{q_3 - \cfrac{\cdot}{\cdot \; \cdot \; - \cfrac{1}{q_r}}}} \qquad (r \leqq m)$$

oder kürzer*)

$$\frac{F(x)}{F_1(x)} = \frac{T}{T_1} = \mathfrak{F}(q_1, q_r).$$

Die Functionen $-F_2, -F_3, \ldots -F_r$ sind die bei der Entwicklung desselben successive auftretenden Reste, $-T_2, -T_3, \ldots T_r$ die reducirten Reste. Es liegt daher nahe, die Methoden ins Auge zu faßen, nach denen jene Entwicklung sich vornehmen läßt, und den Zusammenhang zwischen den Näherungswerten, den Teilnennern und den Resten des Kettenbruches zu untersuchen. Nach den Gleichungen (2) und (3) ist

$$\frac{T}{T_1} = \frac{q_1, q_r}{q_2, q_r}; \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{q_2, q_r}{q_3, q_r}; \ldots \frac{T_{n-2}}{T_{n-1}} = \frac{q_{n-1}, q_r}{q_n, q_r}; \ldots \frac{T_{r-1}}{T_r} = q_r,$$

folglich

$$\frac{T}{T_r} = q_1, q_r; \quad \frac{T_1}{T_r} = q_2, q_r; \ldots \frac{T_n}{T_r} = q_{n+1}, q_r; \ldots \frac{T_{r-1}}{T_r} = q_r, q_r;$$

---

*) Ueber die Bezeichnungen vergl. Stern, Theorie der Kettenbrüche (Crelle, Journal Bd. 10). Der obige Kettenbruch soll der Sturm'sche genannt werden, zur Unterscheidung von dem gewöhnlichen $q_1 + \cfrac{1}{q_2 +}$

oder, da nach einem bekannten Satze aus der Theorie der Kettenbrüche (Stern l. c. §. 4) $q_n, q_r = q_r, q_n$ ist:

$$\frac{T}{T_r} = q_r, q_1; \quad \frac{T_1}{T_r} = q_r, q_2; \ldots \frac{T_n}{T_r} = q_r, q_{n+1}; \ldots \frac{T_{r-1}}{T_r} = q_r, q_r.$$

In diesen Gleichungen sprechen sich die folgenden beiden Sätze aus:

1. Die Verhältnisse der bei der Entwicklung des Kettenbruches $\mathfrak{F}(q_1, q_r)$ auftretenden Reste*) zu dem letzten unter ihnen und die Zähler der Näherungswerte des Kettenbruches $\mathfrak{F}(q_r, q_1)$ in umgekehrter Reihenfolge sind einander paarweise gleich.

2. Die Zeichenreihe der Functionen $q_r, q_1; q_r, q_2; \ldots q_r, q_{r-1}; q_r; 1$ ist der Zeichenreihe der Functionen $F(x), F_1(x), \ldots F_r(x)$ äquivalent, d. h. beide stimmen für einen beliebigen reellen Wert von x in der Anzahl der Zeichenwechsel überein.

Daß der letzte Satz auch von den Zählern der Näherungswerte des ursprünglichen Kettenbruches $\mathfrak{F}(q_1, q_r)$ gilt, erkennt man aus der folgenden Betrachtung. Die Gleichungen, welche den Zusammenhang dieser Zähler ausdrücken, nemlich

$$\begin{aligned}
q_1, q_1 &= q_1 \\
q_1, q_2 &= q_2 \cdot q_1, q_1 - 1 \\
q_1, q_3 &= q_3 \cdot q_1, q_2 - q_1, q_1 \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
q_1, q_{n+1} &= q_{n+1} \cdot q_1, q_n - q_1, q_{n-1} \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{aligned}$$

zeigen, daß, wenn in der Reihe $q_1, q_r; q_1, q_{r-1}; \ldots q_1, q_2; q_1; 1$ irgend eine der mittleren Functionen verschwindet, die beiden benachbarten von 0 verschieden sind und entgegengesetzte Vorzeichen haben. Die Gleichung $q_1, q_r = 0$ besitzt aber dieselben Wurzeln wie $T = 0$, da $q_1, q_r = \frac{T}{T_r}$ und $T_r = const.$ ist. Endlich ersieht man aus der Gleichung

$$\frac{F(x)}{F_1(x)} = \frac{T}{T_1} = \frac{q_1, q_r}{q_2, q_r} = \frac{q_1, q_{r-1} \cdot q_1, q_r}{q_1, q_{r-1} \cdot q_2, q_r} = \frac{q_1, q_{r-1} \cdot q_1, q_r}{1 + q_2, q_{r-1} \cdot q_1, q_r},$$

daß in der Nähe eines Wurzelwertes von $q_1, q_r = 0$ (oder $T = 0$) die Functionen q_1, q_r und q_1, q_{r-1} entgegengesetzte oder gleiche Vorzeichen haben, je nachdem das eine oder das andere bei T und T_1 stattfindet.

Danach ergibt sich der Satz:

---

*) Hierbei gilt $-T$ als der 0te, $-T_1$ als der erste Rest.

3. Die Zeichenreihe der Functionen q_1, q_r; q_1, q_{r-1}; ... q_1, q_n; ... q_1, q_2; q_1; 1 ist der Zeichenreihe der Functionen $F(x)$, $F_1(x)$, ... $F_r(x)$ äquivalent.*)

Wählt man daher $F_1(x)$ so, daß es für alle reellen Wurzelwerte von $F(x) = 0$ mit $\frac{dF(x)}{dx}$ übereinstimmendes Vorzeichen hat, so gilt von den Functionen

$$1;\ q_1, q_1;\ q_1, q_2;\ q_1, q_3;\ \ldots\ q_1, q_r \tag{4}$$

der Sturm'sche Satz.

Bei der Zeichenreihe für $x = +\infty$ kommt es nur auf das Vorzeichen der höchsten Potenz von x an. Schreibt man also wie in §. 1:

$$\begin{aligned} q_1 &= \beta_1\, x + \beta'_1, \\ q_2 &= \beta_2\, x + \beta'_2, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ q_n &= \beta_n\, x + \beta'_n, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ q_r &= \beta_r\, x + \beta'_r, \qquad (r \leq m) \end{aligned}$$

und beachtet das Bildungsgesetz der Näherungswerte, so findet sich

$\beta_1\, x$ als das höchste Glied in q_1, q_1,
$\beta_1\, \beta_2\, x^2$ " " " " " q_1, q_2,
$\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, x^3$ " " " " " q_1, q_3,
. . . .
$\beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_n\, x^n$ " " " " " q_1, q_n,
. . . .
$\beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_r\, x^r$ " " " " " q_1, q_r.

Folglich stimmt die Zeichenreihe für $x = +\infty$ überein mit der Zeichenreihe der folgenden Ausdrücke

$$1,\ \beta_1,\ \beta_1\beta_2,\ \beta_1\beta_2\beta_3,\ \ldots\ \beta_1\beta_2\ \ldots\ \beta_n,\ \ldots\ \beta_1\beta_2\ \ldots\ \beta_r.$$

Diese bietet ebenso viel Zeichenwechsel dar als unter den Coefficienten

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\ \beta_n,\ \ldots\ \beta$$

negative vorkommen. Ist die Anzahl derselben p, so hat die Zeichenreihe $r - p$ Zeichenwechsel für $x = -\infty$. Dadurch sind $2p$ complexe Wurzeln angedeutet, und wir haben den Satz:

---

*) Der Beweis ist von Sturm (Liouville, Journal de Mathématiques T. 7, p. 367 Note). Faßt man die Sätze 1., 2., 3. dieses Paragraphen zusammen, so sieht man, daß die Zähler der Näherungswerte des Kettenbruches $\mathfrak{F}(q_1, q_r)$ und des Kettenbruches $\mathfrak{F}(q_r, q_1)$ äquivalente Zeichenreihen liefern. Vergl. Sylvester, On a remarkable Modification of Sturm's Theorem. (Philosophical Magazine. June 1853, p. 446.)

Die Gleichung $F(x) = 0$ hat so viel verschiedene Paare conjugirter complexer Wurzeln, als die nach Sturm's Methode vorgenommene Kettenbruchsentwicklung von $\frac{F(x)}{F'(x)}$ Teilnenner liefert, in denen der Coefficient von x negativ ist. Zugleich sieht man, daß von den Coefficienten $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_r$ höchstens die Hälfte negativ sein kann.

Die Functionen $F_2(x), F_3(x), \ldots F_r(x)$ laßen sich noch durch $F(x)$, $F_1(x)$ und die Näherungswerte der Sturm'schen Kettenbruchsentwicklung von $\frac{F(x)}{F_1(x)}$ ausdrücken. Eliminirt man nemlich aus den Gleichungen (2) allmählich die Functionen $F_2(x), F_3(x), \ldots F_{n-1}(x)$ und berücksichtigt die bekannten Relationen

$$q_{1,}q_k = q_k \cdot q_{1,}q_{k-1} - q_{1,}q_{k-2},$$
$$q_{2,}q_k = q_k \cdot q_{2,}q_{k-1} - q_{2,}q_{k-2},$$

so findet sich die Gleichung

$$F_n(x) = q_{1,}q_{n-1} \cdot F_1(x) - q_{2,}q_{n-1} \cdot F(x), \tag{5}$$

oder nach vorgenommener Reduction

$$T_n = q_{1,}q_{n-1} \cdot T_1 - q_{2,}q_{n-1} \cdot T, \tag{5*}$$

die im folgenden Paragraphen näher untersucht werden soll. Diese Gleichung ist anzusetzen für $n = 2, 3, \ldots r+1$, mit der Bemerkung, daß $T_{r+1} = 0$ ist.

Es bleibt hier noch die Frage zu beantworten, welche Modificationen die aufgestellten Sätze erleiden, wenn man bei der Kettenbruchsentwicklung jeden Rest mit seinem eigenen Vorzeichen in Rechnung bringt und nicht, wie Sturm verlangt, mit dem entgegengesetzten. Statt der Gleichungen (2) erhält man dann

$$\begin{aligned}
F(x) &= Q_1 \,.\, F'(x) + R_2,\\
F'(x) &= Q_2 \,.\, R_2 + R_3,\\
R_2 &= Q_3 \,.\, R_3 + R_4,\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
R_{n-2} &= Q_{n-1} \,.\, R_{n-1} + R_n,\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
R_{r-1} &= Q_r \,.\, R_r, \qquad (r \leqq m)
\end{aligned}$$

wobei wie früher $Q_1, Q_2, \ldots Q_r$ lineäre Functionen von x sind, R_2 vom Grade $m-2$ und allgemein R_n vom Grade $m-n$ ist. Die Gleichungen (2) laßen sich aber leicht auf dieselbe Form bringen, nemlich

$$F(x) = q_1 \,.\, F'(x) + [- F_2(x)]$$
$$F'(x) = (-q_2) \,.\, [- F_2(x)] + [- F_3(x)]$$
$$- F_2(x) = q_3 \,.\, [- F_3(x)] + F_4(x)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$(-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}} F_{n-2}(x) = (-1)^{n-2} q_{n-1} \,.\, (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}} F_{n-1}(x)$$
$$+ (-1)^{\frac{n(n-1)}{1.2}} F_n(x).$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Ist also der Quotient $\frac{F(x)}{F'(x)}$ auf dem gewöhnlichen Wege in einen Kettenbruch von der Form

$$\frac{F(x)}{F'(x)} = Q_1 + \cfrac{1}{Q_2 + \cfrac{}{\begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ + \cfrac{1}{Q_r} \end{matrix}}} \qquad (r \leqq m)$$

verwandelt, und sind R_2, R_3, ... R_r die entstandenen Reste, so hat man allgemein den Rest R_n mit $(-1)^{\frac{n(n-1)}{1.2}}$ und den Teilnenner Q_n mit $(-1)^{n-1}$ zu multipliciren, um resp. die Sturm'sche Function $F_n(x)$ und den Sturm'schen Teilnenner q_n zu erhalten.

Man kann also auch von der gewöhnlichen Kettenbruchsentwicklung aus leicht zu dem Sturm'schen Satze gelangen. Namentlich können auch die Teilnenner des gewöhnlichen Kettenbruches benutzt werden, um die Anzahl der verschiedenen complexen Wurzeln zu finden. Die Regel lautet dann:

Man nehme die Teilnenner Q_1, Q_2, Q_3, ... Q_r abwechselnd mit ihrem eigenen und mit entgegengesetztem Vorzeichen und zähle die Coefficienten von x, welche dann negativ sind. Ebenso viel verschiedene Paare complexer Wurzeln hat die gegebene Gleichung.

In den nachfolgenden Untersuchungen ist, wo nicht ausdrücklich etwas anderes bemerkt wird, der Sturm'sche Kettenbruch zu Grunde gelegt.

§. 3.

Die Gleichung (5) ist in der allgemeineren Form enthalten

$$(6) \qquad \vartheta_{m-n}(x) = F_1(x) \,.\, \varphi_{n-1}(x) - F(x) \,.\, \psi_{n-2}(x),$$

in welcher ϑ, φ, ψ ganze, rationale Functionen von x bezeichnen resp. vom Grade $m-n$, $n-1$, $n-2$. Durch Elimination von $F_1(x)$ aus (5) und (6) ergibt sich

$$F_n(x) \cdot \varphi_{n-1}(x) - \vartheta_{m-n}(x) \cdot q_1, q_{n-1}$$
$$= F(x) \cdot [\psi_{n-2}(x) \cdot q_1, q_{n-1} - \varphi_{n-1}(x) \cdot q_2, q_{n-1}].$$

Die Producte links sind beide vom Grade $m-1$, dagegen ist rechts schon der eine Factor $F(x)$ vom Grade m. Daher erfordert die Gleichung, daß beide Seiten $= 0$ sein müßen, d. h. es ist

$$(7) \qquad \frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F_n(x)} = \frac{\varphi_{n-1}(x)}{q_1, q_{n-1}} = \frac{\psi_{n-2}(x)}{q_2, q_{n-1}} = \lambda_{n-1}$$

und $\lambda_{n-1} = const.$, weil im Zähler und Nenner Functionen von gleich hohem Grade stehen.

Die Gleichung (6) hat demnach, abgesehen von einem gemeinschaftlichen constanten Factor, als Lösung stets ein und nur ein System von Functionen $\vartheta(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$. Mit diesen stimmen bis auf jenen gemeinschaftlichen Factor die gesuchten Functionen $F_n(x)$; q_1, q_{n-1}; q_2, q_{n-1} überein.

Ein Blick auf die Gleichung (5) zeigt, daß in (7) der Reihe nach $n = 2, 3, \ldots r+1$ zu setzen ist. Für $n = r+1$ sind $F_n(x)$ und $\vartheta_{m-n}(x)$ gleich Null.

Da $\vartheta_{m-n}(x)$, wie man leicht sieht, durch $(x-x_{r+1})(x-x_{r+2})\ldots(x-x_m)$ teilbar sein muß, so setzen wir

$$\vartheta_{m-n}(x) = (x-x_{r+1})(x-x_{r+2})\ldots(x-x_m)\,\theta_{r-n}(x)$$

und haben statt (6) die Gleichung

$$(6^*) \qquad \theta_{r-n}(x) = T_1 \cdot \varphi_{n-1}(x) - T \cdot \psi_{n-2}(x)$$

zu lösen.

Zunächst gelangt man durch Zerlegung von $\frac{T_1}{T}$ in Partialbrüche zu dem Ausdrucke

$$T_1 = \sum_{k=1}^{r} \frac{T_1(x_k)}{T'(x_k)} \cdot \frac{T}{(x-x_k)},$$

worin $\frac{dT}{dx} = T'(x)$ gesetzt ist. Wir schreiben zur Abkürzung $\frac{T_1(x_k)}{T'(x_k)} = \varepsilon_k$, also

$$T_1 = \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_k \cdot \frac{T}{x-x_k}.$$

Es bezeichne ferner

$$Z_{1,2,\ldots n} = \zeta(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

das quadrirte Product der sämmtlichen combinatorisch gebildeten Differenzen von je zwei der Größen $x_1, x_2, \ldots x_n$, und durch das Zeichen Σ werde angedeutet, daß in dem Ausdrucke, dem es vorgeschrieben, für $k_1, k_2, \ldots k_n$ der Reihe nach alle Combinationsformen $n$ter Klasse aus

den Elementen 1, 2, ... r gesetzt und die entstehenden einzelnen Resultate summirt werden sollen. Dann wird die Gleichung (6*) durch die folgenden Ausdrücke von $\theta_{r-n}(x)$ und $\varphi_{n-1}(x)$ befriedigt:

$$(8) \quad \theta_{r-n}(x) = \Sigma\, \varepsilon_{k_1} . \varepsilon_{k_2} \dots \varepsilon_{k_n} . Z_{k_1, k_2, \dots k_n} . \frac{T}{(x-x_{k_1})(x-x_{k_2})\dots(x-x_{k_n})}$$

$$\varphi_{n-1}(x) = \Sigma\, \varepsilon_{k_1} . \varepsilon_{k_2} \dots \varepsilon_{k_{n-1}} . Z_{k_1, k_2, \dots k_{n-1}} . (x-x_{k_1})(x-x_{k_2})\dots(x-x_{k_{n-1}}).$$

Um dies zu beweisen, dividiren wir das Product $T_1 . \varphi_{n-1}(x)$ durch T und erhalten als Quotienten eine ganze Function von $\psi_{n-2}(x)$ vom $(n-2)$ten Grade nebst einem angehängten Bruche $\frac{T_1 . \varphi_{n-1}(x) - T . \psi_{n-2}(x)}{T}$. Diesen zerlegen wir in die Summe von Partialbrüchen

$$\frac{T_1(x_1) . \varphi_{n-1}(x_1)}{T'(x_1) . (x - x_1)} + \frac{T_1(x_2) . \varphi_{n-1}(x_2)}{T'(x_2) . (x - x_2)} + \dots + \frac{T_1(x_r) . \varphi_{n-1}(x_r)}{T'(x_r) . (x - x_r)},$$

die andererseits auch aus der Zerlegung des Quotienten $\frac{\theta_{r-n}(x)}{T}$ hervorgeht. Die Ausdrücke (8) genügen also der Gleichung $\frac{T_1 . \varphi_{n-1}(x) - T . \psi_{n-2}(x)}{T} = \frac{\theta_{r-n}(x)}{T}$, d. h. der Gleichung (6*).

Es ist nicht unwichtig zu bemerken, daß, wenn die Wurzeln $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots x_m$ Wiederholungen der unter einander verschiedenen Wurzeln $x_1, x_2, \dots x_r$ sind, und nur unter dieser Voraussetzung die eben aufgestellten Ausdrücke sowohl für $\vartheta_{m-n}(x)$ als für $\varphi_n(x)$ identisch $= 0$ werden, sobald $n > r$. Umgekehrt ist also das Verschwinden der letzten oder mehrerer der letzten Functionen $\vartheta(x)$ und $\varphi(x)$ ein Kriterium für das Vorhandensein gleicher Wurzeln.

Um λ_{n-1} zu bestimmen, eliminiren wir $F_1(x)$ aus den Gleichungen

$$\vartheta_{m-n}(x) = F_1(x) . \varphi_{n-1}(x) - F(x) . \psi_{n-2}(x),$$
$$\vartheta_{m-n-1}(x) = F_1(x) . \varphi_n(x) - F(x) . \psi_{n-1}(x),$$

und führen auf der rechten Seite des Resultates für $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ die ihnen gleichen Functionen aus (7) ein. Dadurch findet sich

$$\vartheta_{m-n}(x) . \varphi_n(x) - \vartheta_{m-n-1}(x) . \varphi_{n-1}(x)$$
$$= \lambda_n . \lambda_{n-1} F(x) [q_2, q_n . q_1, q_{n-1} - q_1, q_n . q_2, q_{n-1}]$$

oder

$$(9) \quad \vartheta_{m-n}(x) . \varphi_n(x) - \vartheta_{m-n-1}(x) . \varphi_{n-1}(x) = \lambda_n . \lambda_{n-1} . F(x),$$

da nach einem bekannten Satze aus der Theorie der Kettenbrüche

$$q_2, q_n . q_1, q_{n-1} - q_1, q_n . q_2, q_{n-1} = 1$$

ist. Beachten wir, daß in (9) die Coefficienten gleich hoher Potenzen, also auch die von x^m, auf beiden Seiten gleich sein müßen, und schreiben zur Abkürzung ζ_n für den höchsten Coefficienten in $\varphi_n(x)$, so gewinnen wir die Gleichung

$$\lambda_n \cdot \lambda_{n-1} = \zeta_n^2,$$

durch deren wiederholte Anwendung λ_n sich ausdrücken läßt als Function von $\zeta_n, \zeta_{n-1}, \ldots \zeta_2$ und λ_1. Zuletzt bestimmt sich λ_1 aus der Gleichung $\varphi_1(x) = \lambda_1 \cdot q_1$. Es ist nemlich nach der ersten der Gleichungen (2)

$$q_1 = \frac{1}{\zeta_1^2} \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_k \cdot (x - x_k), \quad \text{folglich}$$

$$\lambda_1 = \zeta_1^2 = (\Sigma\, \varepsilon_k)^2, \quad \text{und daher}$$

$$(10) \qquad \begin{aligned} \lambda_{2s} &= \frac{\zeta_2^2 \cdot \zeta_4^2 \cdot \zeta_6^2 \cdots \zeta_{2s}^2}{\zeta_1^2 \cdot \zeta_3^2 \cdot \zeta_5^2 \cdots \zeta_{2s-1}^2}, \\ \lambda_{2s-1} &= \frac{\zeta_1^2 \cdot \zeta_3^2 \cdot \zeta_5^2 \cdots \zeta_{2s-1}^2}{\zeta_2^2 \cdot \zeta_4^2 \cdots \zeta_{2s-2}^2}. \end{aligned}$$

Da die Coefficienten von $F(x)$ reell sind, also complexe Wurzeln von $F(x) = 0$ immer paarweise conjugirt vorkommen, so sind die ζ sämmtlich reell und deshalb die Factoren λ positiv.

Soll der Sturm'sche Satz für die hier betrachteten Functionen gelten, so muß $F_1(x)$ für alle reellen Wurzelwerte von $F(x) = 0$ mit $\frac{dF}{dx}$ übereinstimmendes Vorzeichen haben. Setzen wir $F_1(x) = \frac{dF}{dx}$, so drückt $\frac{T_1(x_k)}{T'(x_k)} = \varepsilon_k$ nach §. 1 aus, wie viel-mal x_k unter den Wurzeln von $F(x) = 0$ vorkommt. Alsdann können wir statt der Ausdrücke (8) auch die folgenden schreiben*)

---

*) Diese Ausdrücke hat zuerst Sylvester aufgestellt (Memoir on Rational Derivation from Equations of Coexistence. — Philosophical Magazine 1839. Decbr. p. 428). Der erste Beweis und die Ableitung der Constanten λ sind von Sturm gegeben (Liouville, Journal T. 7, p. 356: Démonstration d'un Théorème d'algèbre de M. Sylvester). Sturm geht sofort von der Voraussetzung aus, daß $F_1(x) = \frac{dF}{dx}$ ist, und daß $F(x) = 0$ nur ungleiche Wurzeln hat. Unter diesen Einschränkungen führt er den Beweis an dem Beispiele $n = 4$. Der oben eingeschlagene Weg stimmt im Gedankengange mit Sturm überein. Sylvester selbst hat in einem Aufsatze: „On a Theory of the Syzygetic relations of two rational integral functions" (Philosophical Transactions of the Royal Society of London 1853) die Aufgabe allgemein behandelt, die Reste, die

$$(11)\quad \begin{aligned} \vartheta_{m-n}(x) &= \Sigma Z_{k_1, k_2, \ldots k_n} \cdot \frac{F(x)}{(x-x_{k_1})(x-x_{k_2})\ldots(x-x_{k_n})}, \\ \varphi_{n-1}(x) &= \Sigma Z_{k_1, k_2, \ldots k_{n-1}} \cdot (x-x_{k_1})(x-x_{k_2})\ldots(x-x_{k_{n-1}}), \end{aligned}$$

worin $k_1, k_2, \ldots k_n$ eine Combinationsform $n$ter Klasse aus den Elementen $1, 2, \ldots m$ ist. Denn für lauter ungleiche Wurzeln stimmen die Gleichungen (11) mit (8) unmittelbar überein, sind aber mehrfache Wurzeln vorhanden, so verschwinden in (11) so viel Glieder, daß die Gleichungen (8) wieder zum Vorschein kommen.

Wendet man auf die Functionen $\vartheta(x)$ und $\varphi(x)$, — unter der zuletzt gemachten einschränkenden Voraussetzung, daß $F_1(x) = \frac{dF(x)}{dx}$, — die Sätze des vorigen Paragraphen an, und beachtet noch, daß die positiven Factoren λ auf das Vorzeichen keinen Einfluß üben, so findet man:

die Functionen

$$F(x),\quad F'(x),\quad \vartheta_{m-2}(x),\quad \vartheta_{m-3}(x),\quad \ldots\quad \vartheta_{m-r}(x)$$

oder auch die Functionen

$$1,\quad \varphi_1(x),\quad \varphi_2(x),\quad \varphi_3(x),\quad \ldots\quad \varphi_r(x)$$

können den Sturm'schen Functionen substituirt werden.

§. 4.

Das nächstliegende Verfahren zur Herstellung der Functionen $\vartheta(x)$ ist die allmähliche Division nach Anleitung der folgenden Gleichungen, die unmittelbar aus (2), (7) und (10) hervorgehen, wenn

$$\lambda_1 . q_1 = Q_1,\quad \lambda_2 . q_2 = Q_2,\quad \lambda_1 . \lambda_3 . q_3 = Q_3, \ldots \lambda_{n-3} . \lambda_{n-1} . q_{n-1} = Q_{n-1}$$

gesetzt wird.

$$(12)\quad \begin{aligned} \zeta_1^2 . \vartheta_m(x) &= \vartheta_{m-1}(x) . Q_1 - \zeta_0^2 . \vartheta_{m-2}(x), \\ \zeta_2^2 . \vartheta_{m-1}(x) &= \vartheta_{m-2}(x) . Q_2 - \zeta_1^2 . \vartheta_{m-3}(x), \\ \zeta_3^2 . \vartheta_{m-2}(x) &= \vartheta_{m-3}(x) . Q_3 - \zeta_2^2 . \vartheta_{m-4}(x), \\ &\ldots \\ \zeta_{n-1}^2 . \vartheta_{m-n+2}(x) &= \vartheta_{m-n+1}(x) . Q_{n-1} - \zeta_{n-2}^2 . \vartheta_{m-n}(x). \\ &\ldots \end{aligned}$$

Nenner und Zähler der Näherungswerte und die Teilnenner des Kettenbruches herzustellen, in welchen nach Sturm's Methode der Quotient zweier rationalen, ganzen Functionen $\frac{F_1(x)}{F'(x)}$ sich entwickeln läßt, auch die allgemeinen Resultate für den Sturmschen Satz specialisirt (L. c. Section II and III).

Danach findet man aus zwei benachbarten Functionen $\vartheta_{m-n+2}(x)$ und $\vartheta_{m-n+1}(x)$ die nächste Function $\vartheta_{m-n}(x)$ durch folgendes Verfahren. Man multiplicirt $\vartheta_{m-n+2}(x)$ mit ζ_{n-1}^2, dem quadrirten höchsten Coefficienten von $\vartheta_{m-n+1}(x)$, und dividirt das Product durch $\vartheta_{m-n+1}(x)$. Der entstehende Quotient

$$Q_{n-1} = \zeta_{n-1} \cdot \zeta_{n-2} \cdot x + (\zeta_{n-1} \cdot \eta_{n-2} - \zeta_{n-2} \cdot \eta_{n-1})$$

ist eine ganze lineäre Function von x und eine ganze Function der beiden höchsten Coefficienten ζ_{n-2}, η_{n-2} von $\vartheta_{m-n+2}(x)$ und der beiden höchsten Coefficienten ζ_{n-1}, η_{n-1} von $\vartheta_{m-n+1}(x)$. Der Rest gibt, durch $-\zeta_{n-2}^2$ dividirt, die gesuchte Function $\vartheta_{m-n}(x)$. Dies Verfahren gilt, da $\vartheta_m(x) = F(x)$, $\vartheta_{m-1}(x) = F_1(x)$ und $\zeta_0 = 1$ ist, von Anfang, d. h. von $n = 2$ an.

Hat man die Functionen $\vartheta(x)$ und die Quotienten Q auf diesem Wege gefunden, so sind die Functionen φ und ψ für den Sturm'schen Satz allerdings nicht mehr erforderlich. Doch ist es nicht ohne Interesse, die Analogie der Recursionsformeln hervorzuheben. Man findet nemlich (§§. 2 und 3)

$$(13)\quad \begin{aligned}
\varphi_0(x) &= 1,\\
\zeta_0^2 \cdot \varphi_1(x) &= \varphi_0(x) \cdot Q_1,\\
\zeta_1^2 \cdot \varphi_2(x) &= \varphi_1(x) \cdot Q_2 - \zeta_2^2 \cdot \varphi_0(x),\\
\zeta_2^2 \cdot \varphi_3(x) &= \varphi_2(x) \cdot Q_3 - \zeta_3^2 \cdot \varphi_1(x),\\
&\cdots\\
\zeta_{n-1}^2 \cdot \varphi_n(x) &= \varphi_{n-1}(x) \cdot Q_n - \zeta_n^2 \cdot \varphi_{n-2}(x),\\
&\cdots\\
\zeta_{r-1}^2 \cdot \varphi_r(x) &= \varphi_{r-1}(x) \cdot Q_r - \zeta_r^2 \cdot \varphi_{r-2}(x).
\end{aligned}$$

Für die Functionen $\psi(x)$ gehen wir von der Gleichung aus

$$q_{2,}\, q_n = q_n \cdot q_{2,}\, q_{n-1} - q_{2,}\, q_{n-2},$$

multipliciren auf beiden Seiten mit $\lambda_{n-2} \cdot \lambda_{n-1} \cdot \lambda_n$ und erhalten

$$(14)\quad \zeta_{n-1}^2 \cdot \psi_{n-1}(x) = Q_n \cdot \psi_{n-2}(x) - \zeta_n^2 \cdot \psi_{n-3}(x),$$

$\psi_0(x)$ findet sich aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
\vartheta_{m-2}(x) &= \varphi_1(x)\, F_1(x) - \psi_0(x)\, F(x),\\
\vartheta_{m-2}(x) &= Q_1 \cdot \vartheta_{m-1}(x) - \zeta_1^2 \cdot \vartheta_m(x),
\end{aligned}$$

nemlich $\psi_0(x) = \zeta_1^2$, und $\psi_1(x)$ aus der Gleichung $\psi_1(x) = \lambda_2 \cdot q_{2,}\, q_2 = \lambda_2 \cdot q_2 = Q_2$.

§ 5.

Ein anderes Recursionsverfahren ist von Heilermann*) angegeben. Um dasselbe zu entwickeln, bilden wir die Gleichungen

$$
(15)\qquad
\begin{aligned}
F(x) &= a_0\,x\,.\,F_1(x) + U_2. & F_1(x) &= a_1\,.\,U_2 + W_3.\\
U_2 &= a_2\,x\,.\,W_3 + U_4. & W_3 &= a_3\,.\,U_4 + W_5.\\
U_4 &= a_4\,x\,.\,W_5 + U_6. & W_5 &= a_5\,.\,U_6 + W_7.\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
U_{2n-2} &= a_{2n-2}\,x\,.\,W_{2n-1} + U_{2n}. & W_{2n-1} &= a_{2n-1}\,.\,U_{2n} + W_{2n+1}.\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot
\end{aligned}
$$

aus denen der folgende Kettenbruch hervorgeht:

$$
(16)\qquad \frac{F(x)}{F_1(x)} = a_0\,x + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2\,x + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{\cdot}{\cdot\; + \cfrac{1}{a_{2r-2}\,x + \cfrac{1}{a_{2r-1}}}}}}}.
\qquad (r \leqq m)
$$

Eliminirt man allmählich aus (15) die Functionen U und vergleicht die entstehenden Gleichungen mit (2), so gelangt man zu den wichtigen Relationen

$$
\begin{aligned}
F_2(x) &= \frac{1}{a_1}\,.\,W_3. & F_3(x) &= \frac{a_1}{a_3}\,.\,W_5.\\
F_4(x) &= \frac{a_3}{a_1\,.\,a_5}\,.\,W_7. & F_5(x) &= \frac{a_1\,.\,a_5}{a_3\,.\,a_7}\,.\,W_9.\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot & &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
F_{2n}(x) &= \frac{a_3\,.\,a_7\ldots a_{4n-5}}{a_1\,.\,a_5\,.\,a_9\ldots a_{4n-3}}\,.\,W_{4n-1}. & F_{2n+1}(x) &= \frac{a_1\,.\,a_5\ldots a_{4n-3}}{a_3\,.\,a_7\ldots a_{4n-1}}\,.\,W_{4n+1}.\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot & &\cdot\quad\cdot\quad\cdot
\end{aligned}
$$

Bei diesem Verfahren ist U_2 vom Grade $m - 1$. Jede der Functionen W ist im Grade um 1 niedriger, als die ihr vorhergehende Function U, und jede Function U ist von demselben Grade, wie die ihr vorhergehende Function W. Es wird aber stillschweigend vorausgesetzt, daß in

---

*) Über die Reste, welche bei der Anwendung des Sturm'schen Satzes vorkommen (Crelle, Journal Bd. 43, p. 43).

keiner der Functionen U und W der höchste Coefficient Null wird. Diese Voraussetzung ist erfüllt, wenn bei dem Verfahren des §. 1 die sämmtlichen Quotienten q lineär ausfallen, und umgekehrt. Die letzte der Functionen W ist W_{2r-1}, die letzte der Functionen U ist U_{2r}. Oder mit andern Worten: es ist $W_{2r+1} = 0$, und damit bricht die Rechnung ab.

Bezeichnen wir mit

$a_0 = 1, a_1, a_2, \ldots a_m$ die Coefficienten von $F(x)$,

$b_0, \quad b_1, b_2, \ldots b_{m-1}$ die Coefficienten von $F'_1(x)$,

. . . .

$c_0^{(2n-1)}, c_1^{(2n-1)}, c_2^{(2n-1)}, \ldots c_{m-n}^{(2n-1)}$ die Coefficienten von W_{2n-1},

$c_0^{(2n)}, c_1^{(2n)}, c_2^{(2n)}, \ldots c_{m-n}^{(2n)}$ die Coefficienten von U_{2n},

so führt der Gang der Division unmittelbar zu der Recursionsformel

$$c_s^{(k+2)} = c_{s+1}^{(k)} - \alpha_k c_{s+1}^{(k+1)}, \tag{17}$$

wobei $c_s^{(0)} = a_s$, $c_s^{(1)} = b_s$ ist.

Die Teilnenner $\alpha_0, \alpha_1 \ldots$ finden sich mit Hülfe der Gleichung

$$\alpha_k = \frac{c_0^{(k)}}{c_0^{(k+1)}}. \tag{18}$$

Da es nicht auf den absoluten Wert der Reste ankommt, sondern nur auf das Vorzeichen, so sieht man ein, daß in der Gleichung (17)

$$c_s^{(k+2)} = \frac{c_0^{(k+1)} c_{s+1}^{(k)} - c_0^{(k)} c_{s+1}^{(k+1)}}{c_0^{(k+1)}} \tag{17*}$$

im Nenner auch $+1$ oder -1 gesetzt werden darf statt $c_0^{(k+1)}$, je nachdem dieser Coefficient positiv oder negativ ist.

§. 6.

Durch wiederholte Anwendung der Recursionsformel (17*) können wir für jeden Rest einen Ausdruck ableiten, der nur von $F(x)$ und $F_1(x)$ abhängig ist. Zu dem Ende schreiben wir die Gleichung (17*) in Form einer Determinante. Dabei soll zur Abkürzung $c_s^{(k)}$ mit $[k]_s$ bezeichnet werden. Also

$$[k]_s = \frac{1}{[k-1]_0} \begin{vmatrix} [k-1]_0 & [k-2]_0 \\ [k-1]_{s+1} & [k-2]_{s+1} \end{vmatrix}$$

Die erste Verticalreihe kann nach (17*) wieder zerlegt werden, so daß wir erhalten

$$[k]_s = \frac{1}{[k-1]_0 \cdot [k-2]_0} \begin{vmatrix} [k-2]_0 & 0 & 0 \\ 0 & [k-3]_1 & [k-2]_0 \\ 0 & [k-3]_{s+2} & [k-2]_{s+1} \end{vmatrix}$$

$$+ \frac{1}{[k-1]_0 \cdot [k-2]_0} \begin{vmatrix} 0 & [k-3]_0 & 0 \\ [k-2]_1 & 0 & [k-2]_0 \\ [k-2]_{s+2} & 0 & [k-2]_{s+1} \end{vmatrix}$$

oder kürzer

$$[k]_s = \frac{1}{[k-1]_0 \cdot [k-2]_0} \begin{vmatrix} [k-2]_0 & [k-3]_0 & 0 \\ [k-2]_1 & [k-3]_1 & [k-2]_0 \\ [k-2]_{s+2} & [k-3]_{s+2} & [k-2]_{s+1} \end{vmatrix}.$$

Zerlegt man ebenso die letzte Verticalreihe, so ergibt sich

$$[k]_s = \frac{1}{[k-1]_0 \cdot [k-2]_0} \begin{vmatrix} [k-2]_0 & [k-3]_0 & 0 \\ [k-2]_1 & [k-3]_1 & [k-4]_1 \\ [k-2]_{s+2} & [k-3]_{s+2} & [k-4]_{s+2} \end{vmatrix}$$

$$- \frac{[k-4]_0}{[k-1]_0 \, [k-2]_0 \, [k-3]_0} \begin{vmatrix} [k-2]_0 & [k-3]_0 & 0 \\ [k-2]_1 & [k-3]_1 & [k-3]_1 \\ [k-2]_{s+2} & [k-3]_{s+2} & [k-3]_{s+2} \end{vmatrix}.$$

Die letzte Determinante reducirt sich auf

$$+ \frac{1}{[k-1]_0 \cdot [k-2]_0} \begin{vmatrix} [k-2]_0 & [k-3]_0 & [k-4]_0 \\ [k-2]_1 & [k-3]_1 & 0 \\ [k-2]_{s+2} & [k-3]_{s+2} & 0 \end{vmatrix},$$

so daß man schließlich $[k]_s$ in der Form erhält

$$[k]_s = \frac{1}{[k-1]_0 \cdot [k-2]_0} \begin{vmatrix} [k-2]_0 & [k-3]_0 & [k-4]_0 \\ [k-2]_1 & [k-3]_1 & [k-4]_1 \\ [k-2]_{s+2} & [k-3]_{s+2} & [k-4]_{s+2} \end{vmatrix}.$$

Allgemein läßt sich die Determinante

$$\begin{vmatrix} [k-h]_0 & [k-h-1]_0 & [k-h-2]_0 & \dots & [k-2h]_0 \\ [k-h]_1 & [k-h-1]_1 & [k-h-2]_1 & \dots & [k-2h]_1 \\ [k-h]_2 & [k-h-1]_2 & [k-h-2]_2 & \dots & [k-2h]_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ [k-h]_{h-1} & [k-h-1]_{h-1} & [k-h-2]_{h-1} & \dots & [k-2h]_{h-1} \\ [k-h]_{s+h} & [k-h-1]_{s+h} & [k-h-2]_{s+h} & \dots & [k-2h]_{s+h} \end{vmatrix}$$

auf die Form bringen

$$\frac{1}{[k-h-1]_0}\begin{vmatrix} [k-h-1]_0 & [k-h-2]_0 & \dots [k-2h-2]_0 \\ [k-h-1]_1 & [k-h-2]_1 & \dots [k-2h-2]_1 \\ [k-h-1]_2 & [k-h-2]_2 & \dots [k-2h-2]_2 \\ \cdot & \cdot & \dots \cdot \\ [k-h-1]_h & [k-h-2]_h & \dots [k-2h-2]_h \\ [k-h-1]_{s+h+1} & [k-h-2]_{s+h+1} & \dots [k-2h-2]_{s+h+1} \end{vmatrix}.$$

Nimmt man $k = 2n - 1$ und bringt wiederholt die Rechnungen in Anwendung, durch welche die letzte Transformation zu Stande kommt, so ergibt sich

$$[2n-2]_0 . [2n-3]_0 \dots [1]_0 . c_s^{(2n-1)} =$$

$$\begin{vmatrix} [1]_0 & [0]_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots 0 \\ [1]_1 & [0]_1 & [1]_0 & [0]_0 & 0 & 0 & \dots 0 \\ [1]_2 & [0]_2 & [1]_1 & [0]_1 & [1]_0 & [0]_0 & \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \cdot \\ [1]_{2n-3} & [0]_{2n-3} & [1]_{2n-4} & [0]_{2n-4} & [1]_{2n-5} & [0]_{2n-5} & \dots [1]_{n-2} \\ [1]_{s+2n-2} & [0]_{s+2n-2} & [1]_{s+2n-3} & [0]_{s+2n-3} & [1]_{s+2n-4} & [0]_{s+2n-4} & \dots [1]_{s+n-1} \end{vmatrix}.$$

Um daraus die Function W_{2n-1} zu gewinnen, haben wir die letzte Horizontalreihe mit x^{m-n-s} zu multipliciren und die für $s = 0, 1, 2, \dots m-n$ sich ergebenden einzelnen Ausdrücke zu summiren. Das Resultat läßt sich schreiben

$$W_{2n-1} = \frac{1}{[2n-2]_0\,[2n-3]_0 \dots [1]_0} . \Delta_n$$

$$(19)\quad \Delta_n = \begin{vmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & \dots 0 & 0 \\ b_1 & a_1 & b_0 & a_0 & \dots 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & b_1 & a_1 & \dots 0 & 0 \\ b_3 & a_3 & b_2 & a_2 & \dots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \cdot & \cdot \\ b_{n-2} & a_{n-2} & b_{n-3} & a_{n-3} & \dots a_0 & 0 \\ b_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-2} & a_{n-2} & \dots a_1 & b_0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \cdot & \cdot \\ b_{2n-3} & a_{2n-3} & b_{2n-4} & a_{2n-4} & \dots a_{n-1} & b_{n-2} \\ x^{n-1}.F_1(x) & x^{n-2}.F(x) & x^{n-2}.F_1(x) & x^{n-3}.F(x) & \dots F(x) & F_1(x) \end{vmatrix}.$$

Um $F_n(x)$ zu erhalten, ist W_{2n-1} zu multipliciren mit

$$\frac{\alpha_{2n-5} . \alpha_{2n-9} \dots}{\alpha_{2n-3} . \alpha_{2n-7} \dots},$$

d. h. nach Gleichung (18) mit

$$\frac{[2n-2]_0 . [2n-5]_0 . [2n-6]_0 . [2n-9]_0 \ldots}{[2n-3]_0 . [2n-4]_0 . [2n-7]_0 . [2n-8]_0 \ldots}.$$

Folglich ist

$$(20) \qquad F_n(x) = \frac{1}{[2n-3]_0^2 . [2n-4]_0^2 . [2n-7]_0^2 \ldots} . \Delta_n.$$

Da der Factor von Δ_n positiv ist, so kommt er für den Sturm'schen Satz nicht weiter in Betracht. Setzen wir, um die Anwendung auf den Sturm'schen Satz zu machen, $F_1(x) = \frac{dF}{dx}$, und berücksichtigen, daß $b_k = (m-k) a_k$ ist, so läßt sich die Determinante (19) noch vereinfachen. Wir machen nemlich die erste, dritte, ... $(2n-3)$te Verticalreihe nach einander resp. zur letzten, vorletzten u. s. w., so daß in der untersten Horizontalreihe die folgende Anordnung eintritt

$$x^{n-2} . F(x), \quad x^{n-3} . F(x), \ldots F(x), \quad F'(x), \ldots x^{n-2} . F'(x), \quad x^{n-1} . F'(x).$$

Die Determinante erlangt dadurch den Factor $(-1)^{n(n-1)} = +1$. Hierauf subtrahiren wir die erste, zweite, dritte, ... $(n-1)$te Verticalreihe, nachdem dieselben mit m multiplicirt sind, resp. von der $(2n-1)$ten, $(2n-2)$ten, $(2n-3)$ten, ... $(n+1)$ten, und schreiben

$$x F_1(x) - m F(x) = -m U_2 = -U.$$

Dann ist die erste Horizontalreihe 1, 0, 0, 0, ... 0, 0, so daß diese und die erste Verticalreihe wegfallen und Δ_n übergeht in

$$(21) \quad \Delta_n = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & e_1 \\ a_1 & 1 & \ldots 0 & 0 & 0 & \ldots e_1 & e_2 \\ a_2 & a_1 & \ldots 0 & 0 & 0 & \ldots e_2 & e_3 \\ \cdot & \cdot & \ldots . & \cdot & \cdot & \ldots . & \cdot \\ a_{n-3} & a_{n-4} & \ldots 1 & 0 & 0 & \ldots e_{n-3} & e_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots a_1 & b_0 & e_1 & \ldots e_{n-2} & e_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \ldots . & \cdot & \cdot & \ldots . & \cdot \\ a_{2n-4} & a_{2n-5} & \ldots a_{n-1} & b_{n-2} & e_{n-1} & \ldots e_{2n-4} & e_{2n-3} \\ x^{n-3}.F(x) & x^{n-4}.F(x) & \ldots F(x) & F'(x) & U & \ldots x^{n-3}U & x^{n-2}U \end{vmatrix}.$$

Hierin ist $b_k = (m-k) a_k$, $e_k = k . a_k$ und jeder Coefficient a, dessen Index größer als m ist, gleich Null. Für $n = 2$ hat man

$$\Delta_2 = - \begin{vmatrix} b_0 & e_1 \\ F'(x) & U \end{vmatrix};$$

und für $n = 3$

$$\Delta_3 = + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & e_1 \\ a_1 & b_0 & e_1 & e_2 \\ a_2 & b_1 & e_2 & e_3 \\ F(x) & F'(x) & U & xU \end{vmatrix}.$$

Aus Gleichung (20) ergibt sich, daß die Functionen $F(x)$, $F'(x)$, Δ_2, $\Delta_3 \ldots$ den Sturm'schen Functionen substituirt werden können.*)

§. 7.

Wir kehren zu den Gleichungen (8) zurück und stellen die Aufgabe, die Functionen $\vartheta_{m-n}(x)$ und $\varphi_{n-1}(x)$ mittelbar oder unmittelbar durch die Coefficienten von $F(x)$ und $F_1(x)$ auszudrücken.

Das Product

$$P = (x_{k_n} - x_{k_{n-1}})(x_{k_n} - x_{k_{n-2}}) \ldots (x_{k_n} - x_{k_1}) \,.\, (x_{k_{n-1}} - x_{k_{n-2}}) \ldots (x_{k_2} - x_{k_1})$$

der combinatorisch gebildeten Differenzen von je zwei der Wurzeln $x_{k_1}, x_{k_2} \ldots x_{k_n}$ läßt sich in Form einer Determinante schreiben (Baltzer, Determinanten §. 10, 1):

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_{k_1} & x_{k_2} & x_{k_3} & \ldots & x_{k_n} \\ x_{k_1}^2 & x_{k_2}^2 & x_{k_3}^2 & \ldots & x_{k_n}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ x_{k_1}^{n-1} & x_{k_2}^{n-1} & x_{k_3}^{n-1} & \ldots & x_{k_n}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Aus Gleichung (8) haben wir

$$\frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F(x)} = \Sigma \frac{\varepsilon_{k_1} \cdot \varepsilon_{k_2} \ldots \varepsilon_{k_n} \cdot P^2}{(x - x_{k_1})(x - x_{k_2}) \ldots (x - x_{k_n})},$$

oder wenn wir $\dfrac{\varepsilon_{k_1} \cdot \varepsilon_{k_2} \ldots \varepsilon_{k_n} \cdot P}{(x - x_{k_1})(x - x_{k_2}) \ldots (x - x_{k_n})}$ in eine Summe von Partialbrüchen mit den Nennern $(x - x_{k_1}), (x - x_{k_2}), \ldots (x - x_{k_n})$ zerlegen:

---

*) Über das in diesem Paragraphen eingeschlagene Verfahren vergl. Heilermann, Independente Berechnung der Sturm'schen Reste (Crelle, Bd. 48, p. 190) und Sylvester, On a theory of the Syzygetic relations etc. Sect. I, p. 428.

$$\frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F(x)} = \Sigma P . \begin{vmatrix} \varepsilon_{k_1} & \varepsilon_{k_2} & \varepsilon_{k_3} & \dots & \varepsilon_{k_n} \\ \varepsilon_{k_1} x_{k_1} & \varepsilon_{k_2} x_{k_2} & \varepsilon_{k_3} x_{k_3} & \dots & \varepsilon_{k_n} x_{k_n} \\ \varepsilon_{k_1} x_{k_1}^2 & \varepsilon_{k_2} x_{k_2}^2 & \varepsilon_{k_3} x_{k_3}^2 & \dots & \varepsilon_{k_n} x_{k_n}^2 \\ . & . & . & \dots & . \\ \varepsilon_{k_1} x_{k_1}^{n-2} & \varepsilon_{k_2} x_{k_2}^{n-2} & \varepsilon_{k_3} x_{k_3}^{n-2} & \dots & \varepsilon_{k_n} x_{k_n}^{n-2} \\ \frac{\varepsilon_{k_1}}{x-x_{k_1}} & \frac{\varepsilon_{k_2}}{x-x_{k_2}} & \frac{\varepsilon_{k_3}}{x-x_{k_3}} & \dots & \frac{\varepsilon_{k_n}}{x-x_{k_n}} \end{vmatrix} .$$

Führt man die Multiplication der beiden Determinanten aus und schreibt

$$\varepsilon_{k_1} x_{k_1}^i + \varepsilon_{k_2} x_{k_2}^i + \dots + \varepsilon_{k_n} x_{k_n}^i = X_i,$$

so erhält man

$$\frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F(x)} = \Sigma \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & \dots & X_{n-1} \\ X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ . & . & \dots & . \\ X_{n-2} & X_{n-1} & \dots & X_{2n-3} \\ \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varepsilon_{k_\nu} x_{k_\nu}^0}{x-x_{k_\nu}} & \sum \frac{\varepsilon_{k_\nu} x_{k_\nu}^1}{x-x_{k_\nu}} & \dots & \sum \frac{\varepsilon_{k_\nu} x_{k_\nu}^{n-1}}{x-x_{k_\nu}} \end{vmatrix} .$$

Die Determinante hinter dem Summenzeichen löst sich in eine Summe von n^n Determinanten auf. Unter diesen sind jedoch alle diejenigen identisch $= 0$, in welchen die Indices zweier Verticalreihen übereinstimmen, und es bleibt nur eine Summe von $1 . 2 . 3 \dots n$ Gliedern, von denen das erste

$$= \begin{vmatrix} \varepsilon_{k_1} x_{k_1}^0 & \varepsilon_{k_2} x_{k_2}^1 & \varepsilon_{k_3} x_{k_3}^2 & \dots & \varepsilon_{k_n} x_{k_n}^{n-1} \\ \varepsilon_{k_1} x_{k_1}^1 & \varepsilon_{k_2} x_{k_2}^2 & \varepsilon_{k_3} x_{k_3}^3 & \dots & \varepsilon_{k_n} x_{k_n}^n \\ . & . & . & \dots & . \\ \varepsilon_{k_1} x_{k_1}^{n-2} & \varepsilon_{k_2} x_{k_2}^{n-1} & \varepsilon_{k_3} x_{k_3}^n & \dots & \varepsilon_{k_n} x_{k_n}^{2n-3} \\ \frac{\varepsilon_{k_1} x_{k_1}^0}{x-x_{k_1}} & \frac{\varepsilon_{k_2} x_{k_2}^1}{x-x_{k_2}} & \frac{\varepsilon_{k_3} x_{k_3}^2}{x-x_{k_3}} & \dots & \frac{\varepsilon_{k_n} x_{k_n}^{n-1}}{x-x_{k_n}} \end{vmatrix}$$

ist und die übrigen durch Permutation der Indices $k_1, k_2, \dots k_n$ gefunden werden. Um also den Ausdruck für $\frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F(x)}$ zu bilden, hat man in der

letzten Determinante für $k_1, k_2, \ldots k_n$ der Reihe nach alle Variationsformen*) $n$ter Klasse aus den Elementen 1, 2, ... r zu nehmen und die entstehenden einzelnen Determinanten zu addiren. In dieselbe Summe löst sich aber auch die folgende Determinante auf, die wir deshalb $= \frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F(x)}$ setzen dürfen:

$$\frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F(x)} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ s_{n-2} & s_{n-1} & \ldots & s_{2n-3} \\ v_0 & v_1 & \ldots & v_{n-1} \end{vmatrix} \tag{22}$$

$$s_i = \varepsilon_1 x_1^i + \varepsilon_2 x_2^i + \ldots + \varepsilon_r x_r^i$$

$$v_i = \frac{\varepsilon_1 x_1^i}{x - x_1} + \frac{\varepsilon_2 x_2^i}{x - x_2} + \ldots + \frac{\varepsilon_r x_r^i}{x - x_r}.$$

Nun ist zunächst $s_0 = \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_k = \sum \frac{T_1(x_k)}{T'(x_k)}$, und da der höchste Coefficient von $T_1(x)$ mit dem höchsten Coefficienten von $F_1(x)$ übereinstimmt

$$s_0 = \sum_{k=1}^{r} \frac{b_0}{r} + \frac{T_1(x_k) - \frac{b_0}{r} T'(x_k)}{T'(x_k)}.$$

Setzt man $T_1(x) - \frac{b_0}{r} T'(x) = \tau(x)$ und berücksichtigt, daß diese Function vom Grade $r - 2$ ist, so erhält man

$$s_0 = b_0 + x \sum \frac{\tau(x_k)}{(x - x_k)\, T'(x_k)} - \sum \frac{x_k \tau(x_k)}{(x - x_k)\, T'(x_k)}$$

$$= b_0 + \frac{x \tau(x)}{T(x)} - \frac{x \tau(x)}{T(x)},$$

d. h.

$$s_0 = b_0.$$

Sodann ist ferner $v_0 = \frac{T_1(x)}{T(x)} = \frac{F_1(x)}{F(x)}$ und $v_i = x v_{i-1} - s_{i-1}$, folglich

$$v_i = x^i \frac{F_1(x)}{F(x)} - (s_0 x^{i-1} + s_1 x^{i-2} + \ldots + s_{i-1}). \tag{23}$$

---

*) Unter den Variationsformen sind hier die Formen zu verstehen, welche durch Permutation der Indices aus den Combinationsformen gebildet werden.

Multiplicirt man in dieser Gleichung auf beiden Seiten mit $a_{\mu-i}$ ($\mu > m$), setzt i der Reihe nach $= 1, 2, \ldots \mu$ und addirt die Resultate, so findet sich (da $a_0 = 1$ ist)

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{\varepsilon_k}{x - x_k} \cdot (x_k^{\mu} + a_1 x_k^{\mu-1} + \ldots) = v_0 (x^{\mu} + a_1 x^{\mu-1} + \ldots)$$
$$- \sum_{\nu=0}^{\mu-1} x^{\mu-1-\nu} (s_\nu + a_1 s_{\nu-1} + a_2 s_{\nu-2} + \ldots).$$

Hier ist zu beachten, daß $a_{m+1} = a_{m+2} = \ldots = b_m = b_{m+1} = \ldots = 0$ ist. Demnach verschwindet die linke Seite der letzten Gleichung und das erste Glied der rechten Seite geht in $x^{\mu-m} F_1(x)$ über. Also ist

$$x^{\mu-m} F_1(x) = \sum_{\nu=0}^{\mu-1} x^{\mu-1-\nu} \cdot (s_\nu + a_1 s_{\nu-1} + a_2 s_{\nu-2} + \ldots + a_\nu s_0)$$

und da $s_0 = b_0$

(24) $$s_\nu + a_1 \cdot s_{\nu-1} + a_2 \cdot s_{\nu-2} + \ldots + a_\nu \cdot s_0 = b_\nu.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung*) läßt sich der Ausdruck (22) weiter transformiren. Multiplicirt man in (22) auf beiden Seiten mit $F(x)$ und schreibt $\sum_{k=1}^{r} \frac{\varepsilon_k x_k^i F(x)}{x - x_k} = V_i$, so erhält man

(25) $$\vartheta_{m-n}(x) = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ s_{n-2} & s_{n-1} & \ldots & s_{2n-3} \\ V_0 & V_1 & \ldots & V_{n-1} \end{vmatrix} = \sum_{i=0}^{n-1} h_i V_i.$$

Die Entwicklung von V_i gibt

$$V_i = R_i + S_i$$
$$R_i = s_i (x^{m-1} + a_1 x^{m-2} + \ldots + a_{n-2} x^{m-n+1})$$
$$+ s_{i+1} (x^{m-2} + a_1 x^{m-3} + \ldots + a_{n-3} x^{m-n+1})$$
$$+ \ldots$$
$$+ s_{i+n-2} x^{m-n+1}.$$
$$S_i = \sum_{\nu=0}^{m-n} x^{m-n-\nu} (s_{i+n-1+\nu} + a_1 s_{i+n-2+\nu} + \ldots + a_{n-1+\nu} s_i)$$

---

*) Die Gleichungen (23) und (24) hat Brioschi auf einem andern Wege hergeleitet. Vergl. dessen Aufsatz: Intorno ad alcune questioni d'algebra (Tortolini, Annali di Scienze matematiche e fisiche. T. 5, p. 301).

oder mit Rücksicht auf (24)

$$S_0 = -\sum_{\nu=0}^{m-n} - b_{n-1+\nu}\, x^{m-n-\nu},$$

$$S_1 = -\sum_{\nu=0}^{m-n} (a_{n+\nu}\, s_0 - b_{n+\nu})\, x^{m-n-\nu},$$

$$S_i = -\sum_{\nu=0}^{m-n} (a_{n+\nu}\, s_{i-1} + a_{n+1+\nu}\, s_{i-2} + \ldots + a_{n+i-1+\nu}\, s_0 - b_{n+i-1+\nu})\, x^{m-n-\nu}.$$

Dann ergibt sich

$$\vartheta_{m-n}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} h_i R_i + \sum_{i=0}^{n-1} h_i S_i$$

oder da $\Sigma h_i R_i$ identisch $= 0$ ist:

$$(26) \qquad \vartheta_{m-n}(x) = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_i & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{i+1} & \ldots & s_n \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot \\ s_{n-2} & s_{n-1} & \ldots & s_{i+n-2} & \ldots & s_{2n-3} \\ S_0 & S_1 & \ldots & S_i & \ldots & S_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Soll der Sturm'sche Satz Geltung erlangen, so muß $F_1(x)$ für alle reellen Wurzelwerte von $F(x) = 0$ dasselbe Zeichen haben wie $\frac{dF}{dx}$. Am einfachsten nehmen wir $F_1(x) = \frac{dF}{dx}$. Dann geht s_i in die Summe der $i$ten Potenzen aller Wurzeln über, es wird $b_\nu = (m-\nu)\, a_\nu$, und die Gleichung (24) vereinfacht sich zu der von Newton gegebenen Recursionsformel*)

$$s_\nu + a_1 s_{\nu-1} + a_2 s_{\nu-2} + \ldots + a_{\nu-1} s_1 + \nu a_\nu = 0.$$

Die Gleichung (26) ist für diese besondere Voraussetzung zuerst von Cayley aufgestellt.**)

Es erscheint übrigens zweckmäßig, in (26) die Functionen S_0, S_1, S_2, ... S_{n-1} in der Form beizubehalten, wie sie unmittelbar aus (25) hervorgegangen sind. Versteht man unter p eine ganze Zahl und setzt

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_i & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{i+1} & \ldots & s_n \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot \\ s_{n-2} & s_{n-1} & \ldots & s_{i+n-2} & \ldots & s_{2n-3} \\ s_{p+n-1} & s_{p+n} & \ldots & s_{p+i+n-1} & \ldots & s_{p+2n-2} \end{vmatrix} = D_p^{(m-n)},$$

---

*) Arithmetica universalis.

**) Liouville, Journal de Mathématiques. T. 11, p. 297.

so läßt sich $\vartheta_{m-n}(x)$ in folgender Weise ausdrücken:

$$\vartheta_{m-n}(x) = \sum_{p=0}^{m-n} C_p^{(m-n)} x^{m-n-p}, \tag{26*}$$

$$C_0^{(m-n)} = D_0^{(m-n)},$$

$$C_p^{(m-n)} = D_p^{(m-n)} + a_1 D_{p-1}^{(m-n)} + a_2 D_{p-2}^{(m-n)} + \ldots + a_p D_0^{(m-n)}.$$

Für negative ganze Werte von p (bis zu $p = -n+1$) ist $D_p^{(m-n)} = 0$.

§. 8.

Um den Ausdruck für $\varphi_{n-1}(x)$ aus (8) zu transformiren, schreiben wir statt des Productes

$$(x-x_{k_{n-1}})(x-x_{k_{n-2}})\ldots(x-x_{k_1})(x_{k_{n-1}}-x_{k_{n-2}})(x_{k_{n-1}}-x_{k_{n-3}})\ldots(x_{k_{n-1}}-x_{k_1})\ldots(x_{k_2}-x_{k_1})$$

die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & x_{k_1} & x_{k_1}^2 & \ldots & x_{k_1}^{n-1} \\ 1 & x_{k_2} & x_{k_2}^2 & \ldots & x_{k_2}^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 1 & x_{k_{n-1}} & x_{k_{n-1}}^2 & \ldots & x_{k_{n-1}}^{n-1} \\ 1 & x & x^2 & \ldots & x^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Diese ist mit $\varepsilon_{k_1} . \varepsilon_{k_2} \ldots \varepsilon_{k_{n-1}} (x_{k_{n-1}} - x_{k_{n-2}}) \ldots (x_{k_2} - x_{k_1})$ oder mit

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{k_1} & \varepsilon_{k_1} x_{k_1} & \varepsilon_{k_1} x_{k_1}^2 & \ldots & \varepsilon_{k_1} x_{k_1}^{n-2} \\ \varepsilon_{k_2} & \varepsilon_{k_2} x_{k_2} & \varepsilon_{k_2} x_{k_2}^2 & \ldots & \varepsilon_{k_2} x_{k_2}^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \varepsilon_{k_{n-1}} & \varepsilon_{k_{n-1}} x_{k_{n-1}} & \varepsilon_{k_{n-1}} x_{k_{n-1}}^2 & \ldots & \varepsilon_{k_{n-1}} x_{k_{n-1}}^{n-2} \end{vmatrix}$$

zu multipliciren. Dadurch ergibt sich

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & \ldots & X_{n-1} \\ X_1 & X_2 & X_3 & \ldots & X_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ X_{n-2} & X_{n-1} & X_n & \ldots & X_{2n-3} \\ 1 & x & x^2 & \ldots & x^{n-1} \end{vmatrix},$$

wenn $X_i = \varepsilon_{k_1} x_{k_1}^i + \varepsilon_{k_2} x_{k_2}^i + \ldots + \varepsilon_{k_{n-1}} x_{k_{n-1}}^i$ gesetzt wird. Nimmt man dann für $k_1, k_2, \ldots k_{n-1}$ alle Combinationsformen $(n-1)$ter Klasse aus den

Elementen 1, 2, ... r und addirt die entstehenden einzelnen Determinanten, so erhält man als Resultat die gesuchte Function $\varphi_{n-1}(x)$. Die obige Determinante löst sich aber in eine Summe von $(n-1)^{n-1}$ Determinanten auf, von denen alle diejenigen identisch $= 0$ sind, welche in zwei Horizontalreihen gleiche Indices haben. Es bleiben nur $1.\ 2.\ 3.\ \ldots (n-1)$ Determinanten übrig, nemlich

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{k_1} x_{k_1}^0 & \varepsilon_{k_1} x_{k_1}^1 & \varepsilon_{k_1} x_{k_1}^2 & \ldots & \varepsilon_{k_1} x_{k_1}^{n-1} \\ \varepsilon_{k_2} x_{k_2}^1 & \varepsilon_{k_2} x_{k_2}^2 & \varepsilon_{k_2} x_{k_2}^3 & \ldots & \varepsilon_{k_2} x_{k_2}^{n} \\ \varepsilon_{k_3} x_{k_3}^2 & \varepsilon_{k_3} x_{k_3}^3 & \varepsilon_{k_3} x_{k_3}^4 & \ldots & \varepsilon_{k_3} x_{k_3}^{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \varepsilon_{k_{n-1}} x_{k_{n-1}}^{n-2} & \varepsilon_{k_{n-1}} x_{k_{n-1}}^{n-1} & \varepsilon_{k_{n-1}} x_{k_{n-1}}^{n} & \ldots & \varepsilon_{k_{n-1}} x_{k_{n-1}}^{2n-3} \\ 1 & x & x^2 & \ldots & x^{n-1} \end{vmatrix}$$

und alle, welche durch Permutation der Indices daraus entstehen. Man erhält also $\varphi_{n-1}(x)$, wenn man in der letzten Determinante für $k_1, k_2, \ldots k_{n-1}$ der Reihe nach alle Variationsformen $(n-1)$ter Klasse aus den Elementen $1, 2, 3, \ldots r$ setzt und die Resultate addirt. Dieselbe Summe geht aber aus der Zerlegung der folgenden Determinante hervor, so daß diese $= \varphi_{n-1}(x)$ zu setzen ist.

$$\text{(27)} \qquad \varphi_{n-1}(x) = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_i & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{i+1} & \ldots & s_n \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot \\ s_{n-2} & s_{n-1} & \ldots & s_{i+n-2} & \ldots & s_{2n-3} \\ 1 & x & \ldots & x^i & \ldots & x^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit (25) und (6), so ergibt sich zugleich

$$\text{(28)} \qquad \psi_{n-2}(x) = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \ldots & s_i & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_{i+1} & \ldots & s_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot \\ s_{n-2} & s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{i+n-2} & \ldots & s_{2n-3} \\ 0 & P_1 & P_2 & \ldots & P_i & \ldots & P_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$P_i = s_{i-1} + s_{i-2}x + s_{i-3}x^2 + \ldots + s_0 x^{i-1}.$$

Für den Sturm'schen Satz haben wir, wie im vorigen Paragraphen, $s_i = x_1^i + \ldots + x_m^i$ zu nehmen.

Endlich ist*)

$$(29)\qquad \zeta_{n-1} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-2} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_{n-1} \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ s_{n-2} & s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-4} \end{vmatrix}$$

ein Ausdruck, der schon deshalb Beachtung verdient, weil nach §. 1 die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe

$$1, \quad m, \quad \zeta_2, \quad \zeta_3, \quad \dots \quad \zeta_r$$

angibt, wie viel verschiedene Paare complexer Wurzeln die Gleichung $F(x) = 0$ hat.

§. 9.

Die Functionen $\vartheta(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sollen jetzt direct durch die Coefficienten von $F(x)$ und $F_1(x)$ ausgedrückt werden. Zu dem Ende schreiben wir statt der Determinante (25), die vom Grade n ist, die folgende vom Grade $2n-1$

$$\vartheta_{m-n}(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s_0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & s_0 & s_1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & s_1 & s_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & s_0 & \dots & s_{n-3} & s_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s_0 & s_1 & \dots & s_{n-2} & s_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} & s_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s_{n-2} & s_{n-1} & \dots & s_{2n-4} & s_{2n-3} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & V_0 & V_1 & \dots & V_{n-2} & V_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Das Bildungsgesetz ist leicht zu erkennen. Jede Verticalcolonne von (25) wird nach oben bis s_0 fortgesetzt, die Diagonale durch $n-1$ Einheiten vervollständigt und jede dann noch offene Stelle mit 0 ausgefüllt. Addiren wir hierauf die erste, zweite, dritte, ... $(n-1)$te Horizontalreihe, nachdem dieselben resp. mit $x^{n-2}F(x)$, $x^{n-3}F(x)$, $x^{n-4}F(x)$, ... $x^0 F(x)$ multiplicirt sind, zur letzten Horizontalreihe, so geht diese über in

$$x^{n-2}F(x),\ x^{n-3}F(x),\ \dots\ x^0F(x),\ F_1(x),\ xF_1(x),\ \dots\ x^{n-2}F_1(x),\ x^{n-1}F_1(x).$$

---

*) Vgl. Borchardt, Développements sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes (Liouville, Journal T. 12, p. 58).

Zu jeder der übrigen Horizontalreihen addiren wir dann die sämmtlichen über ihr stehenden, nachdem diese (von unten nach oben) der Reihe nach mit $a_1, a_2, \ldots$ multiplicirt sind. Mit Rücksicht auf die Recursionsformel (24) erhalten wir

(30)
$$\vartheta_{m-n}(x) =$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & b_0 \\ a_1 & 1 & \ldots 0 & 0 & 0 & \ldots b_0 & b_1 \\ a_2 & a_1 & \ldots 0 & 0 & 0 & \ldots b_1 & b_2 \\ \cdot & \cdot & \ldots\cdot & \cdot & \cdot & \ldots\cdot & \cdot \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots 1 & 0 & b_0 & \ldots b_{n-3} & b_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots a_1 & b_0 & b_1 & \ldots b_{n-2} & b_{n-1} \\ a_n & a_{n-1} & \ldots a_2 & b_1 & b_2 & \ldots b_{n-1} & b_n \\ \cdot & \cdot & \ldots\cdot & \cdot & \cdot & \ldots\cdot & \cdot \\ a_{2n-3} & a_{2n-4} & \ldots a_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-1} & \ldots b_{2n-4} & b_{2n-3} \\ x^{n-2}F(x) & x^{n-3}F(x) & \ldots F(x) & F_1(x) & xF_1(x) & \ldots x^{n-2}F_1(x) & x^{n-1}F_1(x) \end{vmatrix}.$$

Setzt man in der letzten Horizontalreihe 0 statt $F(x)$ und 1 statt $F_1(x)$, so erhält man $\varphi_{n-1}(x)$. Setzt man dagegen -1 statt $F(x)$ und 0 statt $F_1(x)$, so erhält man $\psi_{n-2}(x)$. Um ζ_{n-1} herzustellen, hat man in (30) die letzte Horizontal- und die letzte Verticalreihe zu streichen. Die erste Horizontal- und die erste Verticalreihe fallen dann von selbst mit weg.

Soll der Sturm'sche Satz Geltung gewinnen, so nehmen wir am einfachsten $F_1(x) = F'(x) = \frac{dF}{dx}$. Dann wird $b_\nu = (m-\nu)\,a_\nu$, und der Ausdruck (30) läßt sich noch weiter zusammenziehen. Subtrahirt man nemlich von der $(2n-k)$ten Verticalreihe das $m$fache der $k$ten [und zwar für $k = 1, 2, \ldots (n-1)$] und schreibt $xF'(x) - mF(x) = -U$, $\nu a_\nu = e_\nu$, so ergibt sich

(31)
$$\vartheta_{m-n}(x) =$$
$$(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & e_1 \\ a_1 & 1 & \ldots 0 & 0 & 0 & \ldots e_1 & e_2 \\ \cdot & \cdot & \ldots\cdot & \cdot & \cdot & \ldots\cdot & \cdot \\ a_{n-3} & a_{n-4} & \ldots 1 & 0 & 0 & \ldots e_{n-3} & e_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots a_1 & b_0 & e_1 & \ldots e_{n-2} & e_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots a_2 & b_1 & e_2 & \ldots e_{n-1} & e_n \\ \cdot & \cdot & \ldots\cdot & \cdot & \cdot & \ldots\cdot & \cdot \\ a_{2n-4} & a_{2n-3} & \ldots a_{n-1} & b_{n-2} & e_{n-1} & \ldots e_{2n-4} & e_{2n-3} \\ x^{n-3}F(x) & x^{n-4}F(x) & \ldots F(x) & F'(x) & U & \ldots x^{n-3}U & x^{n-2}U \end{vmatrix}$$

Vergleicht man dies Resultat mit (21), so zeigt sich, daß die im §. 6 hergestellten Functionen $\Delta_2, \Delta_3, \ldots \Delta_n$ nichts anderes als die Functionen $\vartheta_{m-2}(x), \vartheta_{m-3}(x), \ldots \vartheta_{m-n}(x)$ sind.

Um $\varphi_{n-1}(x)$ zu erhalten, hat man in (31) 0 statt $F(x)$, 1 statt $F'(x)$ und $-x$ statt U' zu setzen. Um $\psi_{n-2}(x)$ zu erhalten, ist -1 statt $F(x)$, 0 statt $F'(x)$ und $-m$ statt U zu setzen. Streicht man in (31) die letzte Horizontal- und die letzte Verticalreihe (wodurch die erste Horizontal- und die erste Verticalreihe zugleich mit wegfallen) und multiplicirt die Determinante mit $(-1)^n$ statt mit $(-1)^{n-1}$, so ergibt sich ζ_{n-1}.*)

§. 10.

Die im vorigen Paragraphen entwickelten Ausdrücke können auch direct aus der Gleichung (6) hergeleitet werden. Setzt man nemlich

$$\varphi_{n-1}(x) = A_0 x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + \ldots + A_{n-2} x + A_{n-1}$$
$$\psi_{n-2}(x) = B_0 x^{n-2} + B_1 x^{n-3} + \ldots + B_{n-3} x + B_{n-2}$$

und berücksichtigt, daß auf der rechten Seite von (6) die Coefficienten von $x^{m+n-2}, x^{m+n-3}, \ldots x^{m-n+1}$ sämmtlich $= 0$ zu setzen sind, so erhält man die folgenden Gleichungen:

---

*) Die Determinanten (30) und (31) hat zuerst Cayley aufgestellt (Liouville, Journal T. 13, p. 269: Nouvelles Recherches sur les fonctions de M. Sturm). Doch beweist er nicht, daß seine Functionen V mit den Sturm'schen Functionen im Vorzeichen übereinstimmen. Dies ist auch in der Tat nicht der Fall. Vielmehr zeigt sich durch Vergleichung von Cayley's Functionen mit dem Ausdruck (31), daß $V = F(x)$, $V_1 = F'(x), \ldots V_n = (-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{1.2}} . \vartheta_{m-n}(x)$. Die Gleichungen (12) geben dann

$$\zeta_1^2 . (-V) = V_1 . (-Q_1) + \zeta_0^2 . V_2$$
$$\zeta_2^2 . V_1 = V_2 . Q_2 + \zeta_1^2 . V_3$$
$$\zeta_3^2 . V_2 = V_3 . (-Q_3) + \zeta_2^2 . V_4$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\zeta_{n-1}^2 . V_{n-2} = V_{n-1} . (-1)^{n-1} . Q_{n-1} + \zeta_{n-2}^2 . V_n .$$

Die Cayley'schen Functionen sind demnach abgesehen von einem positiven Factor die bei der Entwicklung des Kettenbruches für $\frac{-V}{V_1}$ entstehenden Reste, und zwar die Reste selbst, wogegen der Sturm'sche Satz verlangt, daß jeder Rest mit entgegengesetztem Zeichen genommen werde (vgl. §. 2 a. E.). — Über den oben eingeschlagenen Weg vgl. Brioschi, Sur les fonctions de Sturm (Nouvelles Annales de Mathématiques. Rédigées par Terquem et Gérono. T. 13, p. 71). Vertauschen wir in (25), (27), (28) die Horizontalreihen mit den Verticalreihen, so gibt die oben vorgenommene Transformation die von Brioschi entwickelten Resultate.

$$
\begin{array}{rlllll}
0 = & -B_0 - 0 & -\dots- & 0+0 & +\dots+ & 0+b_0 A_0 \\
0 = & -a_1 B_0 - B_1 & -\dots- & 0+0 & +\dots+ & b_0 A_1 + b_1 A_0 \\
\cdot & \cdot \quad \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \quad \cdot \\
0 = & -a_{n-2} B_0 - a_{n-3} B_1 & -\dots- & B_{n-2}+0 & +\dots+ & b_{n-3} A_1 + b_{n-2} A_0 \\
0 = & -a_{n-1} B_0 - a_{n-2} B_1 & -\dots- & a_1 B_{n-2} + b_0 A_{n-1} & +\dots+ & b_{n-2} A_1 + b_{n-1} A_0 \\
\cdot & \cdot \quad \cdot & \dots & \cdot \quad \cdot & \dots & \cdot \quad \cdot \\
0 = & -a_{2n-3} B_0 - a_{2n-4} B_1 & -\dots- & a_{n-1} B_{n-2} + b_{n-2} A_{n-1} & +\dots+ & b_{2n-4} A_1 + b_{2n-3} A_0
\end{array}
$$

$$
\vartheta_{m-n}(x) = -x^{n-2} F(x) B_0 - x^{n-3} F(x) B_1 - \dots - F(x) B_{n-2} + F_1(x) A_{n-1} + \dots + x^{n-2} F_1(x) A_1 + x^{n-1} F_1(x) A_0 .
$$

Bezeichnen wir also mit Δ_n und δ_{n-1} die Determinanten

$$
\Delta_n = \begin{vmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_0 \\
a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & b_0 & b_1 \\
a_2 & a_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_2 \\
\cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\
a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 & \dots & b_{n-3} & b_{n-2} \\
a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & b_0 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} \\
\cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\
a_{2n-3} & a_{2n-4} & \dots & a_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_{2n-4} & b_{2n-3} \\
x^{n-2} F(x) & x^{n-3} F(x) & \dots & F(x) & F_1(x) & \dots & x^{n-2} F_1(x) & x^{n-1} F_1(x)
\end{vmatrix}
$$

$$
\delta_{n-1} = \begin{vmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_0 \\
a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & b_0 & b_1 \\
\cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\
a_{2n-4} & a_{2n-5} & \dots & a_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_{2n-5} & b_{2n-4}
\end{vmatrix},
$$

so findet sich (Baltzer, Determinanten §. 8, 1. — Hattendorff, Determinanten §. 34):

$$\delta_{n-1}\,\vartheta_{m-n}(x) = A_0\,\Delta_n.$$

Nehmen wir $A_0 = \delta_{n-1}$, so wird

$$\vartheta_{m-n}(x) = \Delta_n, \tag{32}$$

und es ist noch zu zeigen, daß diese Function mit $F_n(x)$ einerlei Vorzeichen hat. Hierzu genügt es, zu beachten, daß $\vartheta_{m-n}(x)$ und $\varphi_n(x)$ denselben höchsten Coefficienten haben, nemlich δ_n. Wir gelangen also, wie im §. 3, zu der Gleichung

$$\lambda_n \cdot \lambda_{n-1} = \delta_n^2,$$

d. h. die constanten Factoren, mit denen die Functionen F zu multipliciren sind, um in die Functionen ϑ überzugehen, haben alle dasselbe Vorzeichen. Der höchste Coefficient von $F_2(x)$ ist $\frac{1}{b_0^2}[b_1(b_0a_1-a_0b_1)-b_0(b_0a_2-a_0b_2)]$ oder

$$\frac{1}{b_0^2}\begin{vmatrix} a_0 & 0 & b_0 \\ a_1 & b_0 & b_1 \\ a_2 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

und gibt also mit b_0^2 multiplicirt den höchsten Coefficienten von $\vartheta_{m-n}(x)$. Folglich haben die durch Gleichung (32) ausgedrückten Functionen ϑ allgemein mit den Functionen F gleiches Vorzeichen. Die Gleichung (32) stimmt mit (30) und (19) überein.*)

§. 11.

Man kann von den in (8) gegebenen Functionen φ und ϑ noch auf einem andern Wege**) nachweisen, daß sie die Eigenschaften der Sturmschen Functionen besitzen, wenn $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_r$ positiv sind. Nach (8) und (27) hat man

$$\varphi_n(x) = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_n \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-1} \\ 1 & x & \ldots & x^n \end{vmatrix}$$

$$s_i = \varepsilon_1 x_1^i + \varepsilon_2 x_2^i + \ldots + \varepsilon_r x_r^i.$$

---

*) Vgl. Sylvester, On a Theory of the Syzygetic relations etc. Sect. I.

**) Joachimsthal, Bemerkungen über den Sturm'schen Satz (Crelle, Journal Bd. 48, p. 386). Joachimsthal setzt lauter ungleiche Wurzeln voraus, wodurch die Betrachtung eine unnötige Beschränkung erleidet.

Die Coefficienten in $\varphi_n(x)$ sollen jetzt der Reihe nach bezeichnet werden mit $A_0^{(n)}, A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \dots A_n^{(n)}$, und entsprechende Bezeichnungen sollen für die übrigen Functionen φ gelten.

Multiplicirt man $\varphi_n(x_k)$ mit $\varepsilon_k x_k^i$ und addirt die $k = 1, 2, \dots r$ sich ergebenden Resultate, so erhält man

$$\varepsilon_1 x_1^i \varphi_n(x_1) + \varepsilon_2 x_2^i \varphi_n(x_2) + \dots + \varepsilon_r x_r^i \varphi_n(x_r)$$

$$(33) \qquad = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ . & . & \dots & . \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-1} \\ s_i & s_{i+1} & \dots & s_{i+n} \end{vmatrix} = \begin{cases} 0 & \text{für } i < n \\ A_0^{(n+1)} & \text{für } i = n. \text{*)} \end{cases}$$

Die Division $\varphi_{n+2}(x) : \varphi_{n+1}(x)$ gibt den Quotienten

$$\frac{A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}} x + \frac{A_0^{(n+1)} A_1^{(n+2)} - A_0^{(n+2)} A_1^{(n+1)}}{A_0^{(n+1)} A_0^{(n+1)}}$$

oder kürzer

$$\frac{A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}} x + H$$

und einen Rest $-R(x)$, der eine ganze Function $n$ten Grades von x ist. Wir setzen

$$R(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \dots + \gamma_n x^n.$$

Also ist

$$\varphi_{n+2}(x) = \left\{ \frac{A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}} x + H \right\} \varphi_{n+1}(x) - R(x)$$

und

$$\varepsilon_k x_k^i \varphi_{n+2}(x_k) = \left\{ \frac{A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}} \varepsilon_k x_k^{i+1} + H \varepsilon_k x_k^i \right\} \varphi_{n+1}(x_k) - \varepsilon_k x_k^i R(x_k).$$

Addirt man die für $k = 1, 2, 3, \dots r$ sich ergebenden Resultate, so erhält man eine Gleichung, die für $i = 0, 1, 2, \dots n$ die folgenden Ausdrücke liefert (vergl. 33):

---

*) **Joachimsthal** beweist diese Relation auf einem umständlichen Wege und nur für $n = 2$. Die obige Determinante gestattet aber eine unmittelbare Anwendung des §. 2, 4. von **Baltzer** oder des §. 19 meiner Einleitung in die Determinanten, womit der Beweis allgemein geliefert ist.

$$0 = \gamma_0 s_0 + \gamma_1 s_1 + \gamma_2 s_2 + \ldots + \gamma_n s_n,$$
$$0 = \gamma_0 s_1 + \gamma_1 s_2 + \gamma_2 s_3 + \ldots + \gamma_n s_{n+1},$$
$$0 = \gamma_0 s_2 + \gamma_1 s_3 + \gamma_2 s_4 + \ldots + \gamma_n s_{n+2},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot$$
$$0 = \gamma_0 s_{n-1} + \gamma_1 s_n + \gamma_2 s_{n+1} + \ldots + \gamma_n s_{2n-1},$$
$$A_0^{(n+2)} \frac{A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}} = \gamma_0 s_n + \gamma_1 s_{n+1} + \gamma_2 s_{n+2} + \ldots + \gamma_n s_{2n}.$$

Hierzu schreiben wir als $(n+2)$te Gleichung

$$R(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \ldots + \gamma_n x^n$$

und gelangen durch Elimination der Größen γ zu dem Resultate (Baltzer, Determinanten §. 8, 3. — Hattendorff, Determinanten §. 37):

$$\begin{vmatrix} 0 & s_0 & s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ 0 & s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_{n+1} \\ 0 & s_2 & s_3 & s_4 & \ldots & s_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -\frac{A_0^{(n+2)} A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}} & s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \ldots & s_{2n} \\ -R(x) & 1 & x & x^2 & \ldots & x^n \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung gibt einfach

$$A_0^{(n+1)} R(x) - \frac{A_0^{(n+2)} A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}} \varphi_n(x) = 0,$$

und daher*) findet sich schließlich

$$\varphi_{n+2}(x) = \left\{ \frac{A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}} x + H \right\} \varphi_{n+1}(x) - \left\{ \frac{A_0^{(n+2)}}{A_0^{(n+1)}} \right\}^2 \varphi_n(x). \tag{34}$$

Nehmen wir $F_1(x) = F'(x) = \frac{dF}{dx}$, so ist ε_k positiv und gibt an, wie oft x_k unter den Wurzeln von $F(x) = 0$ vorkommt. Vergleicht man die Ausdrücke

$$T = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_r)$$
$$T_1 = \Sigma \varepsilon_k \frac{T}{x - x_k}$$

mit $\varphi_r(x)$ und $\varphi_{r-1}(x)$ (Gleichung 8), so zeigt sich, daß

*) Die Gleichung (34) zeigt, daß $\varphi_n(x)$ und $\varphi_{n+2}(x)$ entgegengesetzte Zeichen haben, wenn $\varphi_{n+1}(x) = 0$ ist. Eine andere Ableitung dieses Satzes findet sich in Brioschi's Theorie der Determinanten (deutsche Ausgabe von Schellbach S. 61).

$$\varphi_r(x) = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_r \cdot Z_{1,2,\ldots r} \cdot T$$

ist, also $\varphi_r(x)$ bis auf einen constanten positiven Factor mit T übereinstimmt, und daß $\varphi_{r-1}(x)$ für alle reellen Wurzelwerte von $T = 0$ dasselbe Vorzeichen hat wie T_1. Folglich ist die Zeichenreihe der Functionen $1, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_{r-1}(x), \varphi_r(x)$ der Zeichenreihe der Sturm'schen Functionen äquivalent.

Zu Gleichung (34) ist die Bemerkung nicht überflüßig, daß der Rest $-R(x)$ auch durch unmittelbare Ausführung der Division hergestellt werden kann. Auf diesem Wege findet sich, daß in $R(x)$ die Potenz x^n mit dem Coefficienten behaftet ist:

$$\frac{1}{A_0^{(n+1)} A_0^{(n+1)}} \begin{vmatrix} A_0^{(n+1)} & 0 & A_0^{(n+1)} \\ A_1^{(n+2)} & A_0^{(n+1)} & A_1^{(n+1)} \\ A_2^{(n+2)} & A_1^{(n+1)} & A_2^{(n+1)} \end{vmatrix}.$$

Wir bezeichnen mit E die Determinante

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & s_{n+2} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & s_{n+3} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-2} & a_{\overline{n-1}\,n} & a_{\overline{n-1}\,\overline{n+1}} & s_{2n+1} \\ s_n & s_{n+1} & \ldots & s_{2n-1} & a_{n\,n} & a_{n\,\overline{n+1}} & a_{n\,\overline{n+2}} \\ s_{n+1} & s_{n+2} & \ldots & s_{2n} & a_{\overline{n+1}\,n} & a_{\overline{n+1}\,\overline{n+1}} & a_{\overline{n+1}\,\overline{n+2}} \\ s_{n+2} & s_{n+3} & \ldots & s_{2n+1} & s_{2n+2} & a_{\overline{n+2}\,\overline{n+1}} & a_{\overline{n+2}\,\overline{n+2}} \end{vmatrix}$$

und treffen die Bestimmung, daß nach Ausführung der vorzunehmenden Differentiationen allgemein $a_{ik} = s_{i+k}$ gesetzt werden soll. Dann findet sich

$$A_0^{(n+1)} = \frac{\partial^2 E}{\partial a_{\overline{n+1}\,\overline{n+1}}\, \partial a_{\overline{n+2}\,\overline{n+2}}}, \qquad A_1^{(n+2)} = \frac{\partial E}{\partial a_{\overline{n+1}\,\overline{n+2}}},$$

$$A_1^{(n+1)} = \frac{\partial^2 E}{\partial a_{n\,\overline{n+1}}\, \partial a_{\overline{n+2}\,\overline{n+2}}}, \qquad A_2^{(n+2)} = \frac{\partial E}{\partial a_{n\,\overline{n+2}}}.$$

Man sieht, daß $A_1^{(n+2)}$ und $A_2^{(n+2)}$ von $a_{\overline{n+2}\,\overline{n+2}}$ unabhängig sind. Folglich läßt sich die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_1^{(n+2)} & A_0^{(n+1)} \\ A_2^{(n+2)} & A_1^{(n+1)} \end{vmatrix}$$

in die Form bringen:

$$-\frac{\partial\left(\frac{\partial E}{\partial a_{\overline{n+1}\,\overline{n+1}}}\,\frac{\partial E}{\partial a_{n\,\overline{n+2}}}-\frac{\partial E}{\partial a_{n\,\overline{n+1}}}\,\frac{\partial E}{\partial a_{\overline{n+1}\,\overline{n+2}}}\right)}{\partial a_{\overline{n+2}\,\overline{n+2}}}.$$

Nach einem bekannten Determinantensatze (Baltzer, Determinanten §. 6, 2. — Hattendorff, Determinanten §. 57) ist aber dieser letzte Ausdruck gleichbedeutend mit

$$-\frac{\partial\left(E\,\frac{\partial^2 E}{\partial a_{\overline{n+1}\,\overline{n+1}}\,\partial a_{n\,\overline{n+2}}}\right)}{\partial a_{\overline{n+2}\,\overline{n+2}}},\quad \text{d. h. mit}\quad -A_0^{(n+2)}\,\frac{\partial^2 E}{\partial a_{\overline{n+1}\,\overline{n+1}}\,\partial a_{n\,\overline{n+2}}}.$$

Auf diese Weise vereinfacht sich der Ausdruck für den höchsten Coefficienten in $R(x)$, den die directe Rechnung liefert. Denselben Coefficienten kann man aber auch aus der Gleichung (34) entnehmen. Durch Gleichsetzung beider Ausdrücke gelangt man dann zu der merkwürdigen Gleichung:

$$(34^*)\qquad \begin{vmatrix} A_0^{(n+1)} & A_1^{(n+1)} \\ A_1^{(n+1)} & A_2^{(n+1)} - \frac{\partial^2 E}{\partial a_{\overline{n+1}\,\overline{n+1}}\,\partial a_{n\,\overline{n+2}}} \end{vmatrix} = A_0^{(n)}\,A_0^{(n+2)}.$$

Dasselbe Verfahren, nach welchem eben die Functionen φ behandelt sind, läßt sich auf die Functionen ϑ anwenden. Die Coefficienten in $\vartheta_{m-n}(x)$ sollen der Reihe nach bezeichnet werden mit $C_0^{(m-n)}$, $C_1^{(m-n)}$, $C_2^{(m-n)}$, ... $C_{m-n}^{(m-n)}$, und entsprechende Bezeichnungen sollen für die übrigen Functionen ϑ gelten. Nach (8) und (22) ist

$$\frac{\vartheta_{r-n}(x)}{T(x)} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ s_{n-2} & s_{n-1} & \dots & s_{2n-3} \\ v_0 & v_1 & \dots & v_{n-1} \end{vmatrix},$$

$$s_i = \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_k\, x_k^i, \qquad v_i = \sum_{k=1}^{r} \frac{\varepsilon_k\, x_k^i}{x - x_k}.$$

Multiplicirt man mit $T(x)$ aus, setzt $x = x_k$ und beachtet, daß $v_i\,T(x)$ für $x = x_k$ in $\varepsilon_k x_k^i\,T'(x_k)$, d. h. in $x_k^i\,T_1(x_k)$ übergeht, so überzeugt man sich von der Richtigkeit der folgenden Gleichung

$$\sum \varepsilon_k\, x_k^i\,\frac{\vartheta_{r-n}(x_k)}{T_1(x_k)} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ s_{n-2} & s_{n-1} & \dots & s_{2n-3} \\ s_i & s_{i+1} & \dots & s_{i+n-1} \end{vmatrix} = 0 \text{ für } i < n-1.$$

Nimmt man die ganze Zahl i gleich $n-1$ oder größer, z. B. $=n-1+p$, so ist die letzte Determinante dieselbe, die in §. 7 mit $D_p^{(m-n)}$ bezeichnet worden, und man hat den Zusammenhang mit den Coefficienten in $\vartheta_{m-n}(x)$ zu beachten, nemlich

$$C_0^{(m-n)} = D_0^{(m-n)},$$
$$C_p^{(m-n)} = D_p^{(m-n)} + a_1 D_{p-1}^{(m-n)} + a_2 D_{p-2}^{(m-n)} + \dots + a_p D_0^{(m-n)}.$$

Die Division $\vartheta_{m-n}(x) : \vartheta_{m-n-1}(x)$ gibt den Quotienten

$$\frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}}\, x + \frac{C_0^{(m-n-1)} C_1^{(m-n)} - C_0^{(m-n)} C_1^{(m-n-1)}}{C_0^{(m-n-1)} C_0^{(m-n-1)}}$$

oder kürzer

$$\frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}}\, x + H_1$$

und einen Rest, der eine ganze Function $(m-n-2)$ten Grades von x ist. Es liegt daher nahe, die Gleichung anzusetzen:

$$\frac{\vartheta_{r-n}(x)}{T(x)} = \left\{ \frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}}\, x + H_1 \right\} \frac{\vartheta_{r-n-1}(x)}{T(x)} - R_1(x)$$

und zu untersuchen, ob $R_1(x)$ sich in die Form bringen läßt:

$$R_1(x) = \gamma_0 v_0 + \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \dots + \gamma_{n+1} v_{n+1}.$$

Bilden wir die Ausdrücke $\sum_{k=1}^{r} \varepsilon_k x_k^i \frac{\vartheta_{r-n}(x_k)}{T_1(x_k)}$ mit Hülfe der beiden letzten Gleichungen, und zwar für $i = 0, 1, 2, \dots n+1$, so ergibt sich das folgende System:

$$\begin{aligned}
0 &= \gamma_0 s_0 + \gamma_1 s_1 + \dots + \gamma_{n+1} s_{n+1},\\
0 &= \gamma_0 s_1 + \gamma_1 s_2 + \dots + \gamma_{n+1} s_{n+2},\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot\\
0 &= \gamma_0 s_{n-2} + \gamma_1 s_{n-1} + \dots + \gamma_{n+1} s_{2n-1},\\
K_{n-1} &= \gamma_0 s_{n-1} + \gamma_1 s_n + \dots + \gamma_{n+1} s_{2n},\\
K_n &= \gamma_0 s_n + \gamma_1 s_{n+1} + \dots + \gamma_{n+1} s_{2n+1},\\
K_{n+1} &= \gamma_0 s_{n+1} + \gamma_1 s_{n+2} + \dots + \gamma_{n+1} s_{2n+2}.
\end{aligned}$$

Die Bedeutung von K_{n-1}, K_n, K_{n+1} soll gleich angegeben werden. Zunächst eliminiren wir aus dem letzten System und der nächstvorhergehenden Gleichung die Größen γ und erhalten

$$\begin{vmatrix} 0 & s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ 0 & s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & s_{n-2} & s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-1} \\ -K_{n-1} & s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n} \\ -K_n & s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \dots & s_{2n+1} \\ -K_{n+1} & s_{n+1} & s_{n+2} & s_{n+3} & \dots & s_{2n+2} \\ -R_1(x) & v_0 & v_1 & v_2 & \dots & v_{n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung gibt den Ausdruck für $R_1(x)$. Sie vereinfacht sich noch, wenn man die Werte von K_{n-1}, K_n, K_{n+1} einführt. Es ist nemlich

$$K_{n-1} = \frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}} D_0^{(m-n-1)} - D_0^{(m-n)} = 0,$$

$$K_n = \frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}} D_1^{(m-n-1)} + H_1 D_0^{(m-n-1)} - D_1^{(m-n)} = 0,$$

$$K_{n+1} = \frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}} D_2^{(m-n-1)} + H_1 D_1^{(m-n-1)} - D_2^{(m-n)}.$$

Hiernach erhält man aus der letzten Gleichung für $R_1(x)$:

$$C_0^{(m-n-2)} R_1(x) = K_{n+1} \frac{\theta_{r-n-2}(x)}{T(x)}.$$

Nun läßt sich der Ausdruck für K_{n+1} noch vereinfachen. Man hat zunächst

$$K_{n+1} = \frac{1}{C_0^{(m-n-1)} C_0^{(m-n-1)}} \begin{vmatrix} D_0^{(m-n)} & 0 & D_0^{(m-n-1)} \\ D_1^{(m-n)} & D_0^{(m-n-1)} & D_1^{(m-n-1)} \\ D_2^{(m-n)} & D_1^{(m-n-1)} & D_2^{(m-n-1)} \end{vmatrix}.$$

Schreibt man jetzt $\dfrac{\partial E}{\partial a_{\overline{n+2}\,\overline{n+2}}} = D$, so findet sich, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} D_1^{(m-n)} & D_0^{(m-n-1)} \\ D_2^{(m-n)} & D_1^{(m-n-1)} \end{vmatrix}$$

in die Form gebracht werden kann:

$$\frac{\partial \left(\dfrac{\partial D}{\partial a_{nn}} \dfrac{\partial D}{\partial a_{\overline{n+1}\,\overline{n+1}}} - \dfrac{\partial D}{\partial a_{n\,\overline{n+1}}} \dfrac{\partial D}{\partial a_{\overline{n+1}\,n}} \right)}{\partial a_{\overline{n-1}\,\overline{n+1}}}$$

oder nach dem zuletzt citirten Determinantensatze in die Form:

$$\frac{\partial (D D_0^{(m-n)})}{\partial a_{\overline{n-1}\,\overline{n+1}}} = D_0^{(m-n)} \frac{\partial D}{\partial a_{\overline{n-1}\,\overline{n+1}}}.$$

Folglich erhält man für K_{n+1} die Gleichung:

$$K_{n+1} = \frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)} \cdot C_0^{(m-n-1)}} \begin{vmatrix} D_0^{(m-n-1)} & D_1^{(m-n-1)} \\ D_1^{(m-n-1)} & \dfrac{\partial D}{\partial a_{\overline{n-1}\,\overline{n+1}}} + D_2^{(m-n-1)} \end{vmatrix}.$$

Nun braucht man aber nur aus der letzten Determinante und aus der Determinante in (34*) die Ausdrücke der gleichstehenden Elemente zu vergleichen, um sich zu überzeugen, daß diese Determinanten identisch mit einander übereinstimmen. Demnach erhält man schließlich

$$K_{n+1} = \frac{C_0^{(m-n)} A_0^{(n)} A_0^{(n+2)}}{C_0^{(m-n-1)} C_0^{(m-n-1)}} = C_0^{(m-n-2)} \left\{ \frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}} \right\}^2,$$

und die Gleichung für $R_1(x)$ lautet jetzt:

$$R_1(x) = \left\{ \frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}} \right\}^2 \frac{\theta_{r-n-2}(x)}{T(x)}.$$

Damit ist bewiesen, daß

$$(35) \quad \theta_{r-n}(x) = \left\{ \frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}} x + H_1 \right\} \theta_{r-n-1}(x) - \left\{ \frac{C_0^{(m-n)}}{C_0^{(m-n-1)}} \right\}^2 \theta_{r-n-2}(x).$$

Setzen wir $F_1(x) = \frac{dF}{dx}$, so wird $\theta_r(x) = T(x)$, $\theta_{r-1}(x) = T_1(x)$, und wenn man in beiden Gleichungen mit $(x - x_{r+1}) \ldots (x - x_m)$ multiplicirt:

$$\vartheta_m(x) = F(x), \quad \vartheta_{m-1}(x) = F'(x).$$

Die Functionen ϑ können demnach den Sturm'schen Functionen substituirt werden.

§. 12.

Bis hierher ist an der Voraussetzung festgehalten, daß in den Gleichungen (2) die sämmtlichen Quotienten $q_1, q_2, \ldots q_r$ lineäre Functionen von x sind. In diesem Falle tritt jede ganze Zahl von 1 bis r bei einem Quotienten als Index auf, und irgend einer dieser Indices gibt zugleich den Grad des Productes an, welches man erhält, wenn der zugehörige Quotient mit allen vorhergehenden multiplicirt wird.

Die Rechnung, welche zu den Sturm'schen Functionen führt, kann sich aber auch so gestalten, daß von den auf q_1 folgenden Quotienten

einer oder mehrere den ersten Grad übersteigen. Dann ist die Anzahl der Quotienten kleiner als r. Man kann aber auch jetzt die Indices so einrichten, daß jeder von ihnen zugleich den Grad des Productes angibt, welches aus der Multiplication des betreffenden Quotienten mit allen vorhergehenden sich ergibt. Der letzte Quotient ist dann wieder mit q_r bezeichnet.

Es seien i und k positive ganze Zahlen und $i+k<r$. Sind die $i-1$ ersten Quotienten $q_1, q_2, \ldots q_{i-1}$ lineär, so ist in dem System der Sturm'schen Functionen von $F_1(x)$ bis $F_{i-1}(x)$ jede Function im Grade um 1 niedriger, als die vorhergehende. In keiner von ihnen ist die höchste Potenz von x mit dem Coefficienten Null behaftet. Soll nun der auf q_{i-1} unmittelbar folgende Quotient q_{i+k} vom $(k+1)$ten Grade werden, so kann das nur dadurch zu Stande kommen, daß die Function $F_i(x)$ vom $(m-i)$ten Grade auf den $(m-i-k)$ten Grad herabsinkt. Oder mit andern Worten: $F_i(x)$ ist vom $(m-i)$ten Grade, aber die k höchsten Coefficienten haben den Wert Null. Der Zusammenhang zwischen $F_{i-1}(x)$, $F_i(x)$ und q_{i+k} spricht sich aus in der Gleichung:

$$F_{i-1}(x) = q_{i+k}\, F_i(x) - F_{i+k+1}(x).$$

Auf $F_i(x)$ folgt also unmittelbar die Function $F_{i+k+1}(x)$, welche (höchstens) vom Grade $m-i-k-1$ ist. Entsprechende Modificationen zeigen sich an jeder Stelle, wo ein nichtlineärer Quotient auftritt.

Hiernach sieht man, daß bei dem Vorkommen von nichtlineären Quotienten das System der Sturm'schen Functionen (3) nicht mehr vollzählig ist. Die Anzahl der Functionen ist kleiner als $r+1$, und nicht von allen Graden zwischen m und $m-r$ sind Functionen vorhanden.

Ebenso ist bei dem Vorkommen von nichtlineären Quotienten das System der Functionen (4) nicht vollzählig. Ihre Anzahl ist kleiner als $r+1$, und nicht von allen Graden bis zum $r$ten sind Functionen vorhanden.

Die Untersuchungen der §§. 1 und 2 behalten jedoch auch für die nicht vollzähligen Systeme ihre Gültigkeit. Wählt man daher $F_1(x)$ so, daß für alle reellen Wurzelwerte der Gleichung $F(x)=0$ der Quotient $F_1(x):F'(x)$ positiv ausfällt, so bleibt für beide Systeme der Sturm'sche Satz in Kraft.

Die Systeme der Sylvester'schen Functionen ϑ und der Sylvesterschen Functionen φ sind unter allen Umständen vollzählig. Denn die Functionalgleichung (6) und die Lösungen (26), (27), (28) haben immer eine bestimmte Bedeutung für jeden positiven ganzen Wert von n, der nicht kleiner als 2 und nicht größer als $r+1$ ist.

Ist das System der Sturm'schen Functionen nicht vollzählig, so gilt die Gleichung (7) auch nur dann, wenn die Function $F_n(x)$, resp.

der Sturm'sche Zähler q_1, q_{n-1} überhaupt vorhanden ist, und selbst in diesem Falle ist das Vorzeichen von λ_{n-1} von vorn herein nicht bekannt.

Es handelt sich deshalb um zweierlei. Erstens ist das Vorzeichen von λ_{n-1} für alle Functionen ϑ und φ zu bestimmen, für welche die Gleichung (7) vorhanden ist, und zweitens fragt es sich, welche Bedeutung für den Sturm'schen Satz die Functionen ϑ und φ haben, für welche die Gleichung (7) nicht existirt.

In dem vollzähligen System der Functionen ϑ wechseln gruppenweise die Functionen der ersten und der zweiten Art ab. Eine Gruppe der ersten Art hört jedesmal mit einer Function auf, in welcher der höchste Coefficient oder mehrere auf einander folgende Coefficienten vom höchsten an den Wert Null haben. Ebenso groß wie die Zahl dieser verschwindenden Coefficienten ist die Zahl der Functionen in der nächstfolgenden Gruppe der zweiten Art. So enthält die erste Gruppe der ersten Art die Functionen

$$F(x), \quad F_1(x), \quad \vartheta_{m-2}(x), \quad \ldots \quad \vartheta_{m-i}(x).$$

In $\vartheta_{m-i}(x)$ sind nach der Voraussetzung die k höchsten Coefficienten gleich Null. Nach dieser Function beginnt eine Gruppe der zweiten Art, welche aus den k Functionen

$$\vartheta_{m-i-1}(x), \quad \vartheta_{m-i-2}(x), \quad \ldots \quad \vartheta_{m-i-k}(x)$$

gebildet wird.

Für jede Gruppe der ersten Art, welche mehr als eine Function umfaßt, hat man die constanten Factoren λ mit einander zu vergleichen. Es seien $\vartheta_{m-n}(x)$ und $\vartheta_{m-n-1}(x)$ zwei benachbarte Functionen derselben Gruppe erster Art. Für sie gelten die Gleichungen

$$\frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F_n(x)} = \lambda_{n-1}, \quad \frac{\vartheta_{m-n-1}(x)}{F_{n+1}(x)} = \lambda_n,$$

und deshalb läßt sich auch, wie in §. 3, die Gleichung (9) ableiten, aus welcher unmittelbar folgt:

$$\lambda_n \lambda_{n-1} = (C_0^{(m-n)})^2. \tag{36}$$

Da $\vartheta_{m-n}(x)$ nicht die letzte Function der Gruppe ist, so ist ihr höchster Coefficient $C_0^{(m-n)}$ von Null verschieden.

Sollen also aus den Functionen ϑ einer und derselben Gruppe erster Art die correspondirenden Sturm'schen Functionen hergeleitet werden, so sind die anzubringenden constanten Factoren sämmtlich mit einerlei Vorzeichen behaftet.

Man betrachte ferner die letzte Function aus einer Gruppe der ersten Art und die erste Function aus der nächstfolgenden Gruppe derselben Art, z. B. die Functionen $\vartheta_{m-i}(x)$ und $\vartheta_{m-i-k-1}(x)$. Setzt man für jede

dieser beiden Functionen die Gleichung (6) und eliminirt $F_1(x)$, so findet sich

$$\vartheta_{m-i}(x)\,\varphi_{i+k}(x) - \vartheta_{m-i-k-1}(x)\,\varphi_{i-1}(x) = \lambda_{i-1}\,\lambda_{i+k}\,F(x).$$

Auf der rechten Seite ist x^m die höchste Potenz. Links kann dieselbe Potenz nur aus dem ersten Product hervorgehen. Da nun in $\vartheta_{m-i}(x)$ die $(m-i-k)$te Potenz von x die höchste ist, deren Coefficient nicht verschwindet, so muß in $\varphi_{i+k}(x)$ der Coefficient von x^{i+k} verschieden von Null sein. Durch Vergleichung der Coefficienten, welche in der letzten Gleichung rechts und links bei x^m auftreten, gelangt man zu der wichtigen Relation:

(37) $$\lambda_{i-1}\,\lambda_{i+k} = C_k^{(m-i)}\,A_0^{(i+k)}.$$

§. 13.

Die Function $\vartheta_{m-i}(x)$ genügt der Functionalgleichung

(38) $$\vartheta_{m-i}(x) = F_1(x)\,\varphi_{i-1}(x) - F(x)\,\psi_{i-2}(x).$$

Setzt man nun (entsprechend dem Verfahren in §. 10)

$$\varphi_{i-1}(x) = A_0\,x^{i-1} + A_1\,x^{i-2} + \ldots + A_{i-2}\,x + A_{i-1},$$
$$\psi_{i-2}(x) = B_0\,x^{i-2} + B_1\,x^{i-3} + \ldots + B_{i-2}$$

und führt in (38) die Multiplicationen aus, so sieht man, daß in $\vartheta_{m-i}(x)$ die Potenz $x^{m-h+i-2}$ mit dem Coefficienten behaftet ist:

(39) $$C_{h-2i+2}^{(m-i)}$$
$$= -a_h B_0 - a_{h-1} B_1 - \ldots - a_{h-i+2} B_{i-2} + b_{h-i+1} A_{i-1} + \ldots + b_{h-1} A_1 + b_h A_0.$$

Für h sind der Reihe nach die Werte aller ganzen Zahlen von 0 bis $m+i-2$ zu setzen. Nach der Voraussetzung sind in $F_i(x)$ die Coefficienten von $x^{m-i-k+1}$ und von allen höheren Potenzen gleich Null. Vermöge der Gleichung (7) gilt dasselbe von $\vartheta_{m-i}(x)$. Man hat also die Ausdrücke, welche aus (39) für $h = 0, 1, 2, \ldots (2i+k-3)$ hervorgehen, sämmtlich gleich Null zu setzen. Aus dem so gewonnenen Systeme von $2i+k-2$ Gleichungen hat man in jeder möglichen Weise $2i-1$ Gleichungen herauszugreifen, um dann die unbestimmten Coefficienten $A_0, \ldots A_{i-1}, B_0, \ldots B_{i-2}$ zu eliminiren. In jedem Falle erhält man ein Resultat von der Form

(40) $$\Delta' = 0.$$

Die Anzahl dieser Resultate ist

$$\frac{\Pi\,(2i+k-2)}{\Pi\,(2i-1)\,\Pi\,(k-1)}.$$

Die Ausdrücke Δ', welche auf der linken Seite der Gleichungen (40) auftreten, sind alle von einander verschieden. Alle sind aber Determinanten der

$(2i-1)$ten Ordnung, welche an gewissen Stellen Null und übrigens nur die Coefficienten von $F(x)$ und von $F_1(x)$ als Elemente enthalten. Die Gleichungen (40) sprechen die Bedingungen aus, denen die Coefficienten von $F(x)$ und $F_1(x)$ Genüge leisten, wenn in $\vartheta_{m-i}(x)$ keine höhere Potenz als x^{m-i-k} vorkommt.

Man kann aber auch aus dem oben gewonnenen Systeme von $2i+k-2$ Gleichungen auf jede mögliche Weise $2i-2$ Gleichungen herausgreifen und jedesmal als $(2i-1)$te Gleichung hinzufügen:

$$\vartheta_{m-i}(x) = -x^{i-2}F(x)B_0 - x^{i-3}F(x)B_1 \ldots - F(x)B_{i-2} \\ + F_1(x)A_{i-1} \ldots + x^{i-2}F_1(x)A_1 + x^{i-1}F_1(x)A_0.$$

Wenn man dann A_0 als Unbekannte ausrechnet, so ergibt sich ein Resultat von der Form

$$\Delta = \frac{\delta}{A_0}\vartheta_{m-i}(x). \tag{41}$$

Die Anzahl der Gleichungen (41) ist

$$\frac{\Pi(2i+k-2)}{\Pi(2i-2)\Pi(k)}.$$

In allen diesen Gleichungen sind die Ausdrücke Δ auf der linken Seite von einander verschieden. Die sämmtlichen Δ sind aber Determinanten der $(2i-1)$ten Ordnung, in welchen die letzte Horizontalreihe übereinstimmend lautet, nemlich:

$$x^{i-2}F(x),\quad x^{i-3}F(x),\ \ldots\ F(x),\quad F_1(x)\ \ldots\ x^{i-2}F_1(x),\quad x^{i-1}F_1(x).$$

Die übrigen Horizontalreihen haben an gewissen Stellen Null, und übrigens treten nur die Coefficienten von $F(x)$ und $F_1(x)$ als Elemente auf. Mit Hülfe der Gleichungen (40) reducirt sich jede in (41) vorkommende Determinante Δ auf eine Function $(m-i-k)$ten Grades von x. Für die Größen δ gelten Ausdrücke, die auch in sämmtlichen Gleichungen (41) von einander verschieden sind. Man erhält das δ für irgend eine dieser Gleichungen, indem man aus dem zugehörigen Δ die letzte Horizontal- und die letzte Verticalreihe wegstreicht. Unter den Größen δ können auch solche vorkommen, welche gleich Null sind. Jedenfalls gibt es aber unter (41) eine Gleichung, in welcher die Größe $\delta = A_0$, also von Null verschieden ist. Man erhält diese Gleichung, indem man aus dem Systeme von $2i+k-2$ Gleichungen die $2i-2$ ersten Gleichungen beibehält. Bezeichnet man das zugehörige Δ in diesem Falle mit Δ_i, so ergibt sich

$$\Delta_i = \vartheta_{m-i}(x). \tag{42}$$

Die Determinante Δ_i stimmt mit der in (30) überein, wenn man dort $n=i$ setzt.

§. 14.

Wir gehen zu der Function $\vartheta_{m-i-p}(x)$ über für $p \leqq k$. Der Ausdruck für diese Function lautet:

$$\vartheta_{m-i-p}(x) = \Delta_{i+p}, \tag{43}$$

wenn man für Δ_{i+p} die Determinante in Gleichung (30) nimmt und $n = i + p$ setzt. Diese Determinante kann man nach dem Laplaceschen Satze (Baltzer, Determinanten §. 4, 4.) in eine Summe von Producten zerlegen. In jedem Producte soll eine Determinante $(2i - 1)$ter Ordnung mit einer Determinante $2p$ter Ordnung multiplicirt sein. Zur Bildung der erstgenannten streiche man aus Δ_{i+p} die p ersten und die p letzten Verticalreihen aus. Das überzählige System, welches stehen bleibt, enthält in den p ersten Horizontalreihen lauter Nullen. Auch diese sind wegzuwerfen. Alsdann behält man ein System von $2i + p - 1$ Horizontalreihen, von denen jede $2i - 1$ Elemente besitzt. Wählt man daraus auf jede mögliche Weise $2i - 1$ Horizontalreihen, so liefern die so entstehenden vollzähligen Systeme die sämmtlichen Determinanten $(2i - 1)$ter Ordnung, welche in Betracht kommen. Irgend eine von ihnen ist aus dem überzähligen System entweder durch Wegstreichen oder durch Beibehalten der letzten Horizontalreihe entstanden. Im ersten Falle ist sie gleich einer der Größen Δ', im zweiten Falle gleich einer der Größen Δ des vorigen Paragraphen. Im ersten Falle ist die zugehörige Determinante $2p$ter Ordnung, welche als zweiter Factor auftritt, von x abhängig, im zweiten Falle ist sie von x unabhängig. Gilt also die Voraussetzung des vorigen Paragraphen, daß in $\vartheta_{m-i}(x)$ die k höchsten Coefficienten verschwinden, so ist

$$\vartheta_{m-i-p}(x) = M_{i+p}\,\vartheta_{m-i}(x). \tag{44}$$

Hier bezeichnet M_{i+p} eine constante Größe. Die Gleichung (44) ist gültig für jedes ganze, positive p, das nicht größer als k ist. Für $p = k$ erhält man speciell

$$\vartheta_{m-i-k}(x) = M_{i+k}\,\vartheta_{m-i}(x). \tag{45}$$

Die constanten Factoren $M_{i+1}, M_{i+2}, \ldots M_{i+k}$ laßen sich leicht durch die Coefficienten gleich hoher Potenzen in den betreffenden Functionen ausdrücken. Für (45) ist anzumerken, daß der höchste Coefficient in $\vartheta_{m-i-k}(x)$ derselbe ist wie in $\varphi_{i+k}(x)$. Danach erhält man

$$M_{i+k} = A_0^{(i+k)} : C_k^{(m-i)}. \tag{46}$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, daß M_{i+k} von Null verschieden ist. Man kann also $F_i(x)$ ebenso gut aus $\vartheta_{m-i-k}(x)$ ableiten wie aus $\vartheta_{m-i}(x)$. Schreibt man demgemäß

(47) $$\frac{\vartheta_{m-i-k}(x)}{F_i(x)} = \lambda_{i+k-1},$$

so bestimmt sich λ_{i+k-1} aus der Gleichung

(48) $$\lambda_{i+k-1} = M_{i+k}\lambda_{i-1}.$$

Aus (37), (46) und (48) geht dann schließlich hervor:

(49) $$\lambda_{i+k-1}\lambda_{i+k} = (A_0^{(i+k)})^2.$$

Eine entsprechende Gleichung enthält man an jeder Stelle, wo der Übergang von der letzten Function einer Gruppe der zweiten Art zu der ersten Function der nächsten Gruppe erster Art stattfindet.

In der Gleichung (49) spricht sich eine wichtige Erweiterung des in (36) enthaltenen Satzes aus:

Das Gesetz über die Vorzeichen der Factoren λ, welche zu einer und derselben Gruppe gehören, behält auch dann noch seine Gültigkeit, wenn man die letzte Function jeder Gruppe zweiter Art in die nächstfolgende Gruppe der ersten Art abgibt.

§. 15.

Die Functionen φ zerfallen ebenfalls in Gruppen der ersten und der zweiten Art, die mit einander abwechseln. Sind, wie vorausgesetzt, die Quotienten $q_1, q_2, \ldots q_{i-1}$ lineär, und folgt darauf unmittelbar der Quotient q_{i+k} vom Grade $k+1$, so bilden die Functionen

$$1, \quad \varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \ldots \quad \varphi_{i-1}(x)$$

die erste Gruppe der ersten Art. Die nächste Gruppe der ersten Art beginnt mit $\varphi_{i+k}(x)$, und zwischen diesen beiden Gruppen liegt die erste Gruppe der zweiten Art, welche die Functionen

$$\varphi_i(x), \quad \varphi_{i+k}(x), \quad \ldots \quad \varphi_{i+k-1}(x)$$

umfaßt.

Kommt $\varphi_{n-1}(x)$ in einer Gruppe erster Art vor, so gilt für sie die Gleichung (7). Die Functionen einer Gruppe zweiter Art sind noch zu untersuchen. Es sei p eine positive, ganze Zahl, nicht größer als k. Wir setzen die Functionalgleichung (6) einmal an für $n = i$, das andere mal für $n = i + p$ und eliminiren $F_1(x)$. Wird dabei die Gleichung (44) in Betracht gezogen, so lautet das Resultat

$$\vartheta_{m-i}(x)\,\{\varphi_{i+p-1}(x) - M_{i+p}\,\varphi_{i-1}(x)\}$$
$$= F(x)\,\{\psi_{i+p-2}(x)\,\varphi_{i-1}(x) - \psi_{i-2}(x)\,\varphi_{i+p-1}(x)\}.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung kommen höhere Potenzen von x vor als auf der linken. Folglich kann die Gleichung identisch nur da-

durch erfüllt werden, daß die Klammern auf beiden Seiten den Wert Null haben. D. h. es ist

$$\varphi_{i+p-1}(x) = M_{i+p}\,\varphi_{i-1}(x),$$
$$\psi_{i+p-2}(x) = M_{i+p}\,\psi_{i-2}(x).$$

Speciell erhält man für $p = k$

(50) $$\varphi_{i+k-1}(x) = M_{i+k}\,\varphi_{i-1}(x).$$

Da nun, wie schon bewiesen, M_{i+k} von Null verschieden ist, so kann der Sturm'sche Zähler q_1, q_{i-1} ebenso gut aus $\varphi_{i+k-1}(x)$ hergeleitet werden wie aus $\varphi_{i-1}(x)$. Wir erhalten

(51) $$\frac{\varphi_{i+k-1}(x)}{q_1,\ q_{i-1}} = \lambda_{i+k-1},$$

und es hat hier λ_{i+k-1} dieselbe Bedeutung wie in Gleichung (47).

§. 16.

Für die weitere Betrachtung ist es zweckmäßig, sowohl bei den Functionen ϑ, wie bei den Functionen φ die Gruppen-Einteilung etwas abzuändern. Wo nemlich auf eine Gruppe der zweiten Art noch eine solche der ersten Art folgt, da soll die Gruppe der zweiten Art ihre letzte Function an eben diese folgende Gruppe der ersten Art abgeben. Läßt man dann die Gruppen der zweiten Art ganz fallen, so liegen die Gruppen der ersten Art unmittelbar neben einander, und die Trennungsstellen fallen jedesmal zwischen zwei Functionen, die in constantem Verhältnis zu einander stehen.

Hierauf sollen die Systeme (3) und (4) so modificirt werden, daß man jede Function, auf welche eine Lücke folgt, unmittelbar nach der Lücke noch einmal hinschreibt. Durchläuft man gleichzeitig das so modificirte System (3) und das System der Functionen ϑ erster Art, so kommt man nach gleich viel Schritten in dem einen und dem andern System immer zu zwei einander correspondirenden Functionen, resp. zu zwei einander correspondirenden Trennungsstellen. Dieselbe Beziehung findet zwischen dem modificirten System (4) und dem Systeme der Functionen φ erster Art statt.

Zählt man nun innerhalb irgend einer Gruppe erster Art aus dem System der ϑ oder der φ für einen beliebigen reellen Wert von x die Zeichenwechsel der zugehörigen Zeichenreihe, so finden sich wegen der Gleichungen (36) und (49) ebenso viele wie in der correspondirenden Gruppe des Systems (3), resp. des Systems (4). Innerhalb aller Gruppen erster Art sind also bei dem Systeme der ϑ ebenso viele Zeichenwechsel wie in der ganzen Zeichenreihe der Sturm'schen Functionen (3), und

bei dem Systeme der φ ebenso viele Zeichenwechsel wie in der ganzen Zeichenreihe der Sturm'schen Zähler (4).

Wollte man bei den Functionen ϑ oder den Functionen φ die Zeichenwechsel mitzählen, die an den Trennungsstellen zwischen zwei benachbarten Gruppen erster Art auftreten, so könnte dadurch die Gesammtzahl der Zeichenwechsel vermehrt werden. Aber die Vermehrung beträgt für einen reellen Wert von x ebenso viel wie für jeden andern. Denn die Functionen ϑ (resp. die Functionen φ), zwischen denen eine Trennungsstelle liegt, stehen nach (45) [resp. nach (50)] in constantem Verhältnis.

Für den Sturm'schen Satz kommt es nur auf den Unterschied in der Anzahl der Zeichenwechsel für zwei verschiedene reelle Werte $x = a$ und $x = b$ an. Auf diesen Unterschied üben die Zeichenwechsel an den Trennungsstellen der Gruppen keinen Einfluß.

Aus demselben Grunde bleibt aber auch der Sturm'sche Satz in Gültigkeit, selbst wenn man bei den Functionen ϑ und bei den Functionen φ die Gruppen zweiter Art wieder vollständig einschieben wollte. Denn auch dadurch wird nur eine von x unabhängige Anzahl neuer Zeichenwechsel eingeführt.

Danach hat man die folgenden Sätze:

1. Das vollzählige System der Sylvester'schen Functionen ϑ, und ebenso das vollzählige System der Sylvester'schen Functionen φ, ist für den Sturm'schen Satz immer brauchbar, wenn nur $F_1(x)$ die früher bereits aufgestellte Bedingung erfüllt.

2. Wenn man bei der Herstellung der Functionen ϑ, von der höchsten anfangend, eine solche findet, in welcher die k höchsten Coefficienten Null sind, so darf man die nächsten $k - 1$ Functionen weglaßen.

3. Wenn man bei Herstellung der Functionen φ, von der niedrigsten anfangend, k auf einander folgende Functionen findet, in denen der höchste Coefficient Null ist, so braucht man von diesen Functionen nur die letzte beizubehalten.*)

§. 17.

Die bisher betrachteten Methoden stimmen darin überein, daß sie Functionen aufzustellen suchen, welche die im §. 1 unter 1., 2., 3. entwickelten Eigenschaften besitzen. Eine wesentlich andere Auffaßung liegt den Arbeiten von Hermite**) zu Grunde, welche das Sturm'sche Problem für ein System von Gleichungen mit mehreren Unbekannten lösen und

*) Über den Inhalt der §§. 12 bis 16 vergleiche man des Verfaßers Notiz in den „Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wißenschaften in Göttingen. 1873. Nr. 27."

**) Sur l'extension du théorème de M. Sturm à un système d'équations simultanées (Comptes rendus. T. 35, p. 52). Remarques sur le théorème de M. Sturm (Comptes rendus. T. 36, p. 294).

den Sturm'schen Satz selbst als besonderen Fall mit enthalten. Hermite geht von der Transformation der quadratischen Formen und insbesondere von dem Fundamentalsatze aus, den Sylvester das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen nennt.*) Dieser Satz lautet:

Eine quadratische Form

$$f = \sum_{n=1}^{r} \sum_{s=1}^{r} A_{n,s} u_n u_s$$

von den r unabhängigen Variabeln $u_1, u_2, \ldots u_r$, in welcher die Coefficienten ($A_{n,s} = A_{s,n}$) sämmtlich reell sind, kann vermittels der reellen lineären Substitution

$$u_n = a_{n,1} v_1 + a_{n,2} v_2 + \ldots + a_{n,r} v_r \tag{52}$$

auf unendlich viele verschiedene Weisen so transformirt werden, daß die neue Form

$$f = \sum_{n=1}^{r} p_n v_n^2$$

nur die Quadrate der neuen Variabeln enthält. Doch ist in ihr die Anzahl der positiven Glieder und die Anzahl der negativen Glieder stets constant, welche Substitution man auch gewählt haben mag.

Um dieses zu beweisen, setzen wir

$$A_{1,s} a_{1,n} + A_{2,s} a_{2,n} + A_{3,s} a_{3,n} + \ldots + A_{r,s} a_{r,n} = h_{s,n} \tag{53}$$

und bestimmen, daß

$$\begin{aligned} h_{1,n} a_{1,s} + h_{2,n} a_{2,s} + \ldots + h_{r,n} a_{r,s} &= 0 \\ h_{1,n} a_{1,n} + h_{2,n} a_{2,n} + \ldots + h_{r,n} a_{r,n} &= p_n \end{aligned} \tag{54}$$

sein soll. Dadurch geht die quadratische Form über in

$$f = \sum_{n=1}^{r} p_n v_n^2.$$

Auf demselben Wege gibt die lineäre Substitution

$$u_n = c_{n,1} w_1 + c_{n,2} w_2 + \ldots + c_{n,r} w_r \tag{55}$$

die neue Form

$$f = \sum_{n=1}^{r} q_n w_n^2,$$

wenn wir

$$A_{1,s} c_{1,n} + A_{2,s} c_{2,n} + \ldots + A_{r,s} c_{r,n} = k_{s,n} \tag{56}$$

---

*) Sylvester, On a Theory of the Syzygetic relations etc. Sect. IV. Jacobi (Crelle, Journal Bd. 53, p. 275). Hermite (Crelle, Journal Bd. 53, p. 271). Der oben gegebene Beweis ist von Brioschi (Nouvelles Annales de Mathématiques. T. 15, p. 264).

setzen und bestimmen, daß

$$(57)\qquad \begin{aligned} k_{1,n}\,c_{1,s} + k_{2,n}\,c_{2,s} + \ldots + k_{r,n}\,c_{r,s} &= 0 \\ k_{1,n}\,c_{1,n} + k_{2,n}\,c_{2,n} + \ldots + k_{r,n}\,c_{r,n} &= q_n \end{aligned}$$

sein soll.

Wir bezeichnen mit $\alpha_{n,s} = \dfrac{\partial A}{\partial a_{n,s}}$ den Coefficienten von $a_{n,s}$ in der Determinante

$$A = \Sigma \pm (a_{1,1}\,a_{2,2} \ldots a_{r,r})$$

und mit $\gamma_{n,s} = \dfrac{\partial C}{\partial c_{n,s}}$ den Coefficienten von $c_{n,s}$ in der Determinante

$$C = \Sigma \pm (c_{1,1}\,c_{2,2} \ldots c_{r,r}).$$

Die Gleichungen (52) geben dann

$$A\,v_n = \alpha_{1,n}\,u_1 + \alpha_{2,n}\,u_2 + \ldots + \alpha_{r,n}\,u_r$$

und, nachdem statt der Größen u die Größen w [aus (55)] eingeführt sind.

$$(58)\qquad A\,v_n = \lambda_{n,1}\,w_1 + \lambda_{n,2}\,w_2 + \ldots + \lambda_{n,r}\,w_r,$$

wobei zur Abkürzung

$$(59)\qquad \lambda_{n,s} = \alpha_{1,n}\,c_{1,s} + \alpha_{2,n}\,c_{2,s} + \ldots + \alpha_{r,n}\,c_{r,s}$$

gesetzt ist. Mit Hülfe dieser Substitution kann man in die Form $\sum_1^r p_n v_n^2$ statt der Variabeln v die Variabeln w einführen. Das Resultat wird $\sum_1^r q_n w_n^2$ sein, d. h. es ist

$$(60)\qquad \begin{aligned} p_1 \lambda_{1,n}^2 + p_2 \lambda_{2,n}^2 + \ldots + p_r \lambda_{r,n}^2 &= q_n A^2 \\ p_1 \lambda_{1,n} \lambda_{1,s} + p_2 \lambda_{2,n} \lambda_{2,s} + \ldots + p_r \lambda_{r,n} \lambda_{r,s} &= 0. \end{aligned}$$

Wir setzen ferner

$$(61)\qquad \mu_{n,s} = \gamma_{1,n}\,a_{1,s} + \gamma_{2,n}\,a_{2,s} + \ldots + \gamma_{r,n}\,a_{r,s}$$

und erhalten

$$(62)\qquad C w_n = \mu_{n,1}\,v_1 + \mu_{n,2}\,v_2 + \ldots + \mu_{n,r}\,v_r.$$

Dadurch laßen sich in die Form $\sum_1^r q_n w_n^2$ für w die Variabeln v einführen. Da das Resultat mit $\sum_1^r p_n v_n^2$ übereinstimmen muß, so haben wir

$$(63)\qquad \begin{aligned} q_1 \mu_{1,n}^2 + q_2 \mu_{2,n}^2 + \ldots + q_r \mu_{r,n}^2 &= p_n C^2 \\ q_1 \mu_{1,n} \mu_{1,s} + q_2 \mu_{2,n} \mu_{2,s} + \ldots + q_r \mu_{r,n} \mu_{r,s} &= 0. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (60) und (63) laßen sich folgendermaßen verwerten. Es sei

$$L = \begin{vmatrix} l_1 & \lambda_{1,1} & \lambda_{2,1} & \dots & \lambda_{n-1,1} \\ l_2 & \lambda_{1,2} & \lambda_{2,2} & \dots & \lambda_{n-1,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ l_n & \lambda_{1,n} & \lambda_{2,n} & \dots & \lambda_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

und L_s bezeichne dieselbe Determinante, wenn darin $\lambda_{s,1}, \lambda_{s,2}, \dots \lambda_{s,n}$ resp. statt $l_1, l_2, \dots l_n$ geschrieben wird.

Die Gleichungen (60) geben für $n = 1$, $s = 2, 3, \dots n$ die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} p_1 \lambda_{1,1}^2 + p_2 \lambda_{2,1}^2 + p_3 \lambda_{3,1}^2 + \dots + p_r \lambda_{r,1}^2 &= q_1 A^2 \\ p_1 \lambda_{1,1} \lambda_{1,2} + p_2 \lambda_{2,1} \lambda_{2,2} + p_3 \lambda_{3,1} \lambda_{3,2} + \dots + p_r \lambda_{r,1} \lambda_{r,2} &= 0 \\ p_1 \lambda_{1,1} \lambda_{1,3} + p_2 \lambda_{2,1} \lambda_{2,3} + p_3 \lambda_{3,1} \lambda_{3,3} + \dots + p_r \lambda_{r,1} \lambda_{r,3} &= 0 \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \dots \quad\quad &\cdot \\ p_1 \lambda_{1,1} \lambda_{1,n} + p_2 \lambda_{2,1} \lambda_{2,n} + p_3 \lambda_{3,1} \lambda_{3,n} + \dots + p_r \lambda_{r,1} \lambda_{r,n} &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese der Reihe nach mit $\frac{\partial L}{\partial l_1}, \frac{\partial L}{\partial l_2}, \dots \frac{\partial L}{\partial l_n}$ und addirt sie, so ergibt sich

$$p_n \lambda_{n,1} L_n + p_{n+1} \lambda_{n+1,1} L_{n+1} + \dots + p_r \lambda_{r,1} L_r = q_1 A^2 \frac{\partial L}{\partial l_1}.$$

Und auf analoge Weise

$$\begin{aligned} p_n \lambda_{n,2} L_n + p_{n+1} \lambda_{n+1,2} L_{n+1} + \dots + p_r \lambda_{r,2} L_r &= q_2 A^2 \frac{\partial L}{\partial l_2}, \\ \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \dots \quad\quad \cdot \quad\quad &\cdot \\ p_n \lambda_{n,n} L_n + p_{n+1} \lambda_{n+1,n} L_{n+1} + \dots + p_r \lambda_{r,n} L_r &= q_n A^2 \frac{\partial L}{\partial l_n}. \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen hat man auf beiden Seiten der Reihe nach mit $\frac{\partial L}{\partial l_1}, \frac{\partial L}{\partial l_2}, \dots \frac{\partial L}{\partial l_n}$ zu multipliciren und dann die Resultate rechts und links zu addiren, wodurch sich findet

$$(64) \quad p_n L_n^2 + p_{n+1} L_{n+1}^2 + \dots + p_r L_r^2 = A^2 \cdot \left\{ q_1 \left(\frac{\partial L}{\partial l_1}\right)^2 + q_2 \left(\frac{\partial L}{\partial l_2}\right)^2 + \dots + q_n \left(\frac{\partial L}{\partial l_n}\right)^2 \right\}.$$

Ebenso setzen wir

$$M = \begin{vmatrix} m_1 & \mu_{1,1} & \mu_{2,1} & \dots & \mu_{n-2,1} \\ m_2 & \mu_{1,2} & \mu_{2,2} & \dots & \mu_{n-2,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ m_{n-1} & \mu_{1,n-1} & \mu_{2,n-1} & \dots & \mu_{n-2,n-1} \end{vmatrix}$$

und bezeichnen mit M_s dieselbe Determinante, wenn man darin statt der ersten Verticalreihe $\mu_{s,1}, \mu_{s,2}, \dots \mu_{s,n-1}$ setzt. Dann führt der vorher eingeschlagene Weg von den Gleichungen (63) zu der folgenden

$$(65)\qquad q_{n-1} M_{n-1}^2 + q_n M_n^2 + \dots + q_r M_n^2$$
$$= C^2 \left\{ p_1 \left(\frac{\partial M}{\partial m_1}\right)^2 + p_2 \left(\frac{\partial M}{\partial m_2}\right)^2 + \dots + p_{n-1} \left(\frac{\partial M}{\partial m_{n-1}}\right)^2 \right\}.$$

Sind die Coefficienten $a_{n,s}$, $c_{n,s}$ der linearen Substitutionen, wie wir voraussetzen, reell, so gilt dasselbe auch von den Determinanten L_s, M_s, $\frac{\partial L}{\partial l_s}$, $\frac{\partial M}{\partial m_s}$. Die Vorzeichen in (64) und (65) sind also nur von den Größen p und q abhängig. Es mögen $p_1, p_2, \dots p_{n-1}$ sämmtlich negativ, $p_n, p_{n+1}, \dots p_r$ sämmtlich positiv sein. Dann gibt die Gleichung (64) zu erkennen, daß nicht $q_1, q_2, \dots q_n$ sämmtlich negativ sein können. Die letzteren bilden aber irgend eine Combination $n$ter Klasse von den r Größen $q_1, q_2, \dots q_r$. Folglich können von diesen nicht mehr als $n-1$ negativ sein. Die Gleichung (65) zeigt dagegen, daß von denselben Größen $q_1, q_2, \dots q_r$ nicht mehr als $r-n+1$ positiv sein können, also mindestens $n-1$ negativ sein müßen. D. h. es sind wirklich $n-1$ der Größen $q_1, q_2, \dots q_r$ negativ.

§. 18.

Wir betrachten die lineäre Substitution

$$\begin{aligned}
u_1 &= v_1 + a_{1,2} v_2 + a_{1,3} v_3 + \dots + a_{1,n} v_n + \dots + a_{1,r} v_r \\
u_2 &= \phantom{v_1 + a_{1,2}} v_2 + a_{2,3} v_3 + \dots + a_{2,n} v_n + \dots + a_{2,r} v_r \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
u_n &= v_n + \dots + a_{n,r} v_r \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
u_r &= v_r.
\end{aligned}$$

Hier ist also $A = 1$ und wir haben

$$\begin{aligned}
v_1 &= u_1 + \alpha_{2,1} u_2 + \alpha_{3,1} u_3 + \dots + \alpha_{n,1} u_n + \dots + \alpha_{r,1} u_r \\
v_2 &= \phantom{u_1 + \alpha_{2,1}} u_2 + \alpha_{3,2} u_3 + \dots + \alpha_{n,2} u_n + \dots + \alpha_{r,2} u_r \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
v_n &= u_n + \dots + \alpha_{r,n} u_r \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
v_r &= u_r.
\end{aligned}$$

Die Gleichungen (54) geben allgemein $A h_{s,n} = p_n \alpha_{s,n}$, also hier $h_{s,n} = p_n \alpha_{s,n}$. Da ferner im vorliegenden Falle

$$\begin{aligned}
a_{n+1,n} &= a_{n+2,n} = \dots = a_{r,n} = 0 \\
\alpha_{1,n} &= \alpha_{2,n} = \dots = \alpha_{n-1,n} = 0
\end{aligned}$$

ist, so wird aus (53)

$$A_{1,1}\,a_{1,n} + A_{2,1}\,a_{2,n} + \dots + A_{n,1}\,a_{n,n} = 0$$
$$A_{1,2}\,a_{1,n} + A_{2,2}\,a_{2,n} + \dots + A_{n,2}\,a_{n,n} = 0$$
$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdots \qquad \cdot \qquad \cdot$$
$$A_{1,n}\,a_{1,n} + A_{2,n}\,a_{2,n} + \dots + A_{n,n}\,a_{n,n} = p_n\,\alpha_{n,n}$$

und

$$A_{1,s}\,a_{1,n} + A_{2,s}\,a_{2,n} + \dots + A_{n,s}\,a_{n,n} = p_n\,\alpha_{s,n}.$$

Schreiben wir also

(66)
$$m_{s,n} = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \dots & A_{n,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \dots & A_{n,2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A_{1,n-1} & A_{2,n-1} & \dots & A_{n,n-1} \\ A_{1,s} & A_{2,s} & \dots & A_{n,s} \end{vmatrix}$$

und beachten, daß $a_{n,n} = 1$, $\alpha_{n,n} = 1$ ist, so finden wir

(67)
$$p_n = \frac{m_{n,n}}{m_{n-1,n-1}}.$$

Die Coefficienten der Substitution sind leicht zu bestimmen. Es ist nemlich (für $q < n$)

$$m_{n,n}\,a_{q,n} = p_n \frac{\partial m_{n,n}}{\partial A_{q,n}},$$

folglich

$$a_{q,n} = \frac{1}{m_{n-1,n-1}} \frac{\partial m_{n,n}}{\partial A_{q,n}}.$$

Ferner ergibt sich

$$\begin{vmatrix} 0 & A_{1,1} & A_{2,1} & \dots & A_{n,1} \\ 0 & A_{1,2} & A_{2,2} & \dots & A_{n,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -1 & A_{1,n} & A_{2,n} & \dots & A_{n,n} \\ -\alpha_{s,n} & A_{1,s} & A_{2,s} & \dots & A_{n,s} \end{vmatrix} = 0,$$

folglich

$$\alpha_{s,n} = \frac{m_{s,n}}{m_{n,n}}.$$

Aus der Gleichung (67) geht hervor, daß die quadratische Form

$$\sum_{n=1}^{r} \sum_{s=1}^{r} A_{n,s}\,u_n\,u_s$$

in eine andere $\sum_{n=1}^{r} p_n\,v_n^2$ transformirt werden kann, die so viel positive

und resp. so viel negative Glieder hat, als Zeichenfolgen und resp. Zeichenwechsel in der Reihe

$$m_{0,0} = 1, \quad m_{1,1} = A_{1,1}, \quad m_{2,2}, \quad m_{3,3}, \quad \ldots \quad m_{r,r}$$

vorkommen.

§. 19.

Eine andere bemerkenswerte Transformation ist die orthogonale, bei welcher die alten Variabeln u und die neu einzuführenden v an die Bedingungsgleichung geknüpft sind

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_r^2 = v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_r^2.$$

Setzt man für u die Werte aus (52), so erfordert diese Gleichung, daß

$$\begin{aligned} a_{1,s}^2 \quad &+ a_{2,s}^2 \quad + \ldots + a_{r,s}^2 \quad = 1 \\ a_{1,s}\, a_{1,n} &+ a_{2,s}\, a_{2,n} + \ldots + a_{r,s}\, a_{r,n} = 0 \end{aligned}$$

sei, woraus $A^2 = 1$ gefunden wird. Multiplicirt man in den aus (52) für $n = 1, 2, 3, \ldots r$ hervorgehenden Gleichungen der Reihe nach mit $a_{1,n}, a_{2,n}, \ldots a_{r,n}$ und addirt die Resultate rechts und links, so erhält man

$$v_n = a_{1,n}\, u_1 + a_{2,n}\, u_2 + \ldots + a_{r,n}\, u_r,$$

wonach auch

$$\begin{aligned} a_{s,1}^2 \quad &+ a_{s,2}^2 \quad + \ldots + a_{s,r}^2 \quad = 1 \\ a_{s,1}\, a_{n,1} &+ a_{s,2}\, a_{n,2} + \ldots + a_{s,r}\, a_{n,r} = 0 \end{aligned}$$

sein muß. Ferner sieht man, daß $\alpha_{s,n} = A\, a_{s,n}$ ist, weshalb die allgemeine Gleichung $A\, h_{s,n} = p_n\, \alpha_{s,n}$ hier

$$h_{s,n} = p_n\, a_{s,n}$$

gibt.

Dadurch geht die Gleichung (53) über in

$$A_{1,s}\, a_{1,n} + A_{2,s}\, a_{2,n} + \ldots + (A_{s,s} - p_n)\, a_{s,n} + \ldots A_{r,s}\, a_{r,n} = 0.$$

Setzt man hierin $s = 1, 2, \ldots r$ und eliminirt $a_{1,n}, a_{2,n}, \ldots a_{r,n}$, so erhält man

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} - p_n & A_{2,1} & A_{3,1} & \ldots & A_{r,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} - p_n & A_{3,2} & \ldots & A_{r,2} \\ A_{1,3} & A_{2,3} & A_{3,3} - p_n & \ldots & A_{r,3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ A_{1,r} & A_{2,r} & A_{3,r} & \ldots & A_{r,r} - p_n \end{vmatrix} = 0.$$

Da diese Gleichung für jedes ganze n von 1 bis r gilt, so sind $p_1, p_2, \ldots p_r$ die Wurzeln der Gleichung $r$ten Grades

$$(68)\qquad \begin{vmatrix} A_{1,1}-p & A_{2,1} & A_{3,1} & \dots & A_{r,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2}-p & A_{3,2} & \dots & A_{r,2} \\ A_{1,3} & A_{2,3} & A_{3,3}-p & \dots & A_{r,3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A_{1,r} & A_{2,r} & A_{3,r} & \dots & A_{r,r}-p \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung, welche zuerst von Laplace*) bei der Untersuchung der säcularen Ungleichheiten der Planetenbewegungen betrachtet ist, hat lauter reelle Wurzeln. Denn angenommen, es wäre auch nur eine Wurzel complex, so setze man sie $= x_1 + xi$ und verstehe unter x_1 und x reelle Zahlen und unter i die imaginäre Einheit. Schreibt man dann $A_{1,1} - x_1 = A'_{1,1}$, $A_{2,2} - x_1 = A'_{2,2}$, $\dots$ $A_{r,r} - x_1 = A'_{r,r}$, und ferner

$$\begin{vmatrix} A'_{1,1}-xi & A_{2,1} & \dots & A_{r,1} \\ A_{1,2} & A'_{2,2}-xi & \dots & A_{r,2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A_{1,r} & A_{2,r} & \dots & A'_{r,r}-xi \end{vmatrix} = \Gamma(xi),$$

so muß $\Gamma(xi) = 0$ sein, wenn die Gleichung (68) wirklich eine complexe Wurzel besitzt. Laßen wir jetzt in $A'_{1,1}$, $A'_{2,2}$, $\dots$ $A'_{r,r}$ den oberen Index weg und schreiben

$$B_{g,h} = A_{g,1}A_{h,1} + A_{g,2}A_{h,2} + \dots + A_{g,r}A_{h,r},$$

so finden wir durch Multiplication von $\Gamma(xi)$ mit $\Gamma(-xi)$

$$(69)\qquad \Gamma(xi)\,\Gamma(-xi) = \begin{vmatrix} B_{1,1}+x^2 & B_{2,1} & \dots & B_{r,1} \\ B_{1,2} & B_{2,2}+x^2 & \dots & B_{r,2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ B_{1,r} & B_{2,r} & \dots & B_{r,r}+x^2 \end{vmatrix}$$

$$= x^{2r} + G_1 x^{2r-2} + G_2 x^{2r-4} + \dots + G_{r-1}x^2 + G_r.$$

Der Coefficient G_{r-n} ist die Summe der einzelnen Determinanten, die sich aus

$$D = \begin{vmatrix} B_{1,1} & B_{2,1} & \dots & B_{r,1} \\ B_{1,2} & B_{2,2} & \dots & B_{r,2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ B_{1,r} & B_{2,r} & \dots & B_{r,r} \end{vmatrix}$$

ergeben, indem man auf jede mögliche Weise die in n der Diagonalglieder $B_{1,1}$, $B_{2,2}$, $\dots$ $B_{r,r}$ sich schneidenden Horizontal- und Verticalreihen aus-

*) Histoire de l'Académie des Sciences. Année 1772.

streicht. Jede solche Determinante entsteht aber dadurch, daß man aus $\Gamma(0)$ die entsprechenden n Horizontalreihen ausstreicht und die Quadrate aller der Determinanten addirt, die aus dem stehen gebliebenen Systeme durch Weglaßung irgendwelcher Combination von n Verticalreihen gebildet werden.*) Da hiernach die sämmtlichen Coefficienten $G_1, G_2, \ldots G_r$ positiv sind, so ist die rechte Seite der Gleichung (69) eine Summe von lauter positiven Bestandteilen. Folglich kann die Gleichung $\Gamma(xi) = 0$ für reelle x nur erfüllt werden, wenn $x = 0$ und $G_r = 0$, d. h. die oben aufgestellte Gleichung für p hat lauter reelle Wurzeln.**)

Statt der Gleichung (68) kann man auch schreiben

$$(68^*) \quad p^r - H_1 p^{r-1} + H_2 p^{r-2} - + \ldots + (-1)^{r-1} H_{r-1} p + (-1)^r H_r = 0,$$

wenn H_{r-n} die Summe der Determinanten vorstellt, die aus

$$m_{r,r} = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \ldots & A_{r,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \ldots & A_{r,2} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ A_{1,r} & A_{2,r} & \ldots & A_{r,r} \end{vmatrix}$$

sich ergeben, indem man auf jede mögliche Weise die in n der Diagonalglieder $A_{1,1}, A_{2,2}, \ldots A_{r,r}$ sich schneidenden Horizontal- und Verticalreihen ausstreicht. Da nach dem Cartesischen Satze die Anzahl der positiven p mit der Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe

$$1, \quad -H_1, \quad +H_2, \quad -H_3, \quad \ldots \quad (-1)^{r-1} H_{r-1}, \quad (-1)^r, \quad H_r$$

übereinstimmt, so findet man:

Die transformirte quadratische Form hat so viel positive und resp. so viel negative Glieder, als Zeichenfolgen und resp. Zeichenwechsel in der Reihe

$$1, \quad H_1, \quad H_2, \quad H_3, \quad \ldots \quad H_{r-1}, \quad H_r$$

vorhanden sind.

Diese letzte Reihe ist demnach auch der durch die Gleichung (66) gegebenen Reihe

$$1, \quad A_{1,1}, \quad m_{2,2}, \quad m_{3,3}, \quad \ldots \quad m_{r-1,r-1}, \quad m_{r,r}$$

in Beziehung auf die Anzahl der Zeichenfolgen und der Zeichenwechsel äquivalent.

---

*) Baltzer, Determinanten §. 5, 1. — Hattendorff, Determinanten §. 51.

**) Vgl. Sylvester, Phil. Magazine. Aug. 1852. pag. 138. — Borchardt, Développements sur l'équation etc. (Liouville, Journal, T. 12).

§. 20.

Es seien $x_1, x_2, \ldots x_r, x_{r+1}, \ldots x_m$ die Wurzeln der Gleichung

$$F(x) = 0,$$

und zwar $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots x_m$ irgend welche Wiederholungen der unter einander verschiedenen Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_r$. Wir setzen $T(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_r)$ und bezeichnen mit $\rho_1(x), \rho_2(x), \ldots \rho_r(x)$ rationale ganze Functionen von x, mit a eine positive oder negative ganze ungerade Zahl und mit $\omega(x)$ und $\pi(x)$ zwei Polynome, die für jeden reellen Wurzelwert von $F(x) = 0$ im Vorzeichen übereinstimmen. Die constanten Coefficienten der sämmtlichen Functionen sollen reell sein.

Wir betrachten die quadratische Form der r Variabeln $u_1, u_2, \ldots u_r$

$$(70)\quad f = \sum_{k=1}^{r} (x-x_k)^a \cdot \frac{\omega(x_k)}{\pi(x_k)} \cdot [u_1 \rho_1(x_k) + u_2 \rho_2(x_k) + \ldots + u_r \rho_r(x_k)]^2,$$

die sich auch schreiben läßt

$$(71)\quad f = \sum_{n=1}^{r} \sum_{s=1}^{r} A_{n,s}\, u_n u_s,$$

wenn

$$A_{n,s} = \sum_{k=1}^{r} (x-x_k)^a \cdot \frac{\omega(x_k)}{\pi(x_k)} \cdot \rho_n(x_k) \cdot \rho_s(x_k)$$

gesetzt wird. Hat die Gleichung $F(x) = 0$ nur reelle Wurzeln und werden für x nur reelle Werte gesetzt, so sieht man leicht, daß $A_{n,s}$ immer reell ist. Sind aber

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_{c+1} \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x_2 \\ x_{c+2} \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x_c \\ x_{2c} \end{matrix}\right\}$$

c Paare conjugirter complexer Wurzeln, und die übrigen Wurzeln $x_{2c+1}, \ldots x_r$ reell, so kann man schreiben

$$(x-x_1)^a \cdot \omega(x_1) = \lambda_1 + \mu_1 \sqrt{-1}; \qquad \pi(x_1) = l_1 + m_1 \sqrt{-1};$$

$$u_1 \rho_1(x) + u_2 \rho_2(x_1) + \ldots + u_r \rho_r(x_1) = P_1 + Q_1 \sqrt{-1};$$

folglich ist dann

$$(x-x_{c+1})^a \cdot \omega(x_{c+1}) = \lambda_1 - \mu_1 \sqrt{-1}; \quad \pi(x_{c+1}) = l_1 - m_1 \sqrt{-1};$$

$$u_1 \rho_1(x_{c+1}) + u_2 \rho_2(x_{c+1}) + \ldots + u_r \rho_r(x_{c+1}) = P_1 - Q_1 \sqrt{-1}.$$

Analoge Ausdrücke entstehen aus den übrigen conjugirten Wurzelpaaren, so daß wir erhalten (für $\lambda_p l_p + \mu_p m_p = \alpha_p$, $\lambda_p m_p - \mu_p l_p = \beta_p$):

$$f = \sum_{p=1}^{c} \frac{2}{\alpha_p (l_p^2 + m_p^2)} \cdot \{(\alpha_p P_p + \beta_p Q_p)^2 - (\alpha_p^2 + \beta_p^2) Q_p^2\}$$

$$+ \sum_{k=2c+1}^{r} (x - x_k)^a \cdot \frac{\omega(x_k)}{\pi(x_k)} \cdot [u_1 \rho_1(x_k) + u_2 \rho_2(x_k) + \ldots + u_r \rho_r(x_k)]^2.$$

Gibt man x nur reelle Werte, so kommen in diesem Ausdrucke nur reelle Größen vor, und es müßen daher, wenn man ihn in die Form (71) bringt, die Coefficienten reell sein. Wir führen statt $u_1, u_2, \ldots u_r$ neue Variable $v_1, v_2, \ldots v_r$ ein durch die linearen Substitutionen

$$\left.\begin{aligned} v_p &= \alpha_p . P_p + \beta_p . Q_p \\ v_{c+p} &= Q_p \end{aligned}\right\} \text{ für } p = 1, 2, \ldots c,$$

$$v_k = u_1 \rho_1(x_k) + u_2 \rho_2(x_k) + \ldots + u_r . \rho_r(x_k) \text{ für } k = 2c+1, 2c+2, \ldots r.$$

Dadurch wird

$$(72) \quad f = \sum_{p=1}^{c} \frac{2}{\alpha_p (l_p^2 + m_p^2)} \cdot \{v_p^2 - (\alpha_p^2 + \beta_p^2) v_{c+p}^2\} + \sum_{k=2c+1}^{r} (x - x_k)^a \cdot \frac{\omega(x_k)}{\pi(x_k)} \cdot v_k^2,$$

und es gelten über die Anzahl der positiven, resp. der negativen Glieder dieser neuen Form die Sätze der vorigen Paragraphen.

Beachtet man, daß in (72) die erste Summe stets eben so viel positive und eben so viel negative Glieder enthält, als verschiedene complexe Wurzelpaare der Gleichung $F(x) = 0$ existiren, so gelangt man zu dem folgenden Satze:

Für einen reellen Wert h von x stimmt die Anzahl der Zeichenfolgen in der Zeichenreihe der Functionen (§. 18)

$$1, \quad m_{1,1}, \quad m_{2,2}, \quad \ldots \quad m_{r,r}$$

oder der Functionen (§. 19)

$$1, \quad H_1, \quad H_2, \quad \ldots \quad H_r$$

überein mit der Anzahl der verschiedenen complexen Wurzelpaare von $F(x) = 0$, vermehrt um die Anzahl der verschiedenen reellen Wurzeln, die kleiner als h sind.

Und die Anzahl der Zeichenwechsel stimmt überein mit der Anzahl der verschiedenen complexen Wurzelpaare, vermehrt um die Anzahl der verschiedenen reellen Wurzeln, die größer als h sind.

Sind daher h und h_1 reelle Zahlen und $h_1 > h$, so liegen zwischen $x = h$ und $x = h_1$ so viel verschiedene reelle Wur-

zeln von $F(x)=0$, wie die obige Zeichenreihe für $x=h_1$ Zeichenwechsel weniger hat als für $x=h$.*)

§. 21.

I. Um aus den unendlich vielen Systemen von Functionen, welche hiernach die Eigenschaften der Sturm'schen Functionen besitzen, einige besonders herauszuheben, setzen wir

$$\rho_n(x) = x^{n-1}, \quad \pi(x) = T'(x), \quad \omega(x) = T_1(x), \quad a = 1,$$

also

$$A_{n,s} = \sum_{k=1}^{r} (x - x_k) \frac{T_1(x_k)}{T'(x_k)} x_k^{n+s-2}$$

oder

$$A_{n,s} = x\, s_{n+s-2} - s_{n+s-1},$$

wenn wir wie früher $\sum \frac{T_1(x_k)}{T'(x_k)} x_k^i$ mit s_i bezeichnen. Folglich ist dann

$$m_{n,n} = \begin{vmatrix} x s_0 - s_1 & x s_1 - s_2 & \dots & x s_{n-1} - s_n \\ x s_1 - s_2 & x s_2 - s_3 & \dots & x s_n - s_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x s_{n-2} - s_{n-1} & x s_{n-1} - s_n & \dots & x s_{2n-3} - s_{2n-2} \\ x s_{n-1} - s_n & x s_n - s_{n+1} & \dots & x s_{2n-2} - s_{2n-1} \end{vmatrix}$$

oder

$$m_{n,n} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix}, \tag{73}$$

d. h. es ist

$$m_{n,n} = \varphi_n(x).$$

II. Machen wir dagegen

$$\rho_n(x) = x^{n-1}, \quad \pi(x) = T'(x), \quad \omega(x) = T_1(x), \quad a = -1$$

und setzen, wie früher:

$$v_i = \sum_{k=1}^{r} \frac{x_k^i T_1(x_k)}{(x - x_k) T'(x_k)},$$

---

*) Über die Functionen 1, H_1, H_2, ... H_r vgl. Canchy, Sur le dénombrement des racines etc. Comptes rendus T. 40, p. 1329.

so wird

$$m_{n,n} = \begin{vmatrix} v_0 & v_1 & \dots & v_{n-1} \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ v_{n-1} & v_n & \dots & v_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

Subtrahirt man das $x$fache jeder Horizontalreihe von der folgenden und bedenkt, daß $x v_i - v_{i+1} = s_i$ ist, so erhält man

(74)
$$m_{n,n} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ s_{n-2} & s_{n-1} & \dots & s_{2n-3} \\ v_0 & v_1 & \dots & v_{n-1} \end{vmatrix}$$

d. h.

$$m_{n,n} = \frac{\vartheta_{m-n}(x)}{F(x)}.$$

Damit sind wir auf die früheren Resultate zurückgekommen. Es verdient jedoch bemerkt zu werden, daß diese Herleitung unter allen Umständen Gültigkeit hat, ganz unabhängig von der Frage, ob die Teilnenner der Sturm'schen Kettenbruchs-Entwicklung sämmtlich lineär sind oder nicht.

III. Unter der Voraussetzung, daß sämmtliche Teilnenner des Sturmschen Kettenbruches lineär ausfallen, hat Brioschi*) die Methode von Hermite angewandt, um für die Zähler der Näherungswerte und für die Sturm'schen Reste selbst die Gültigkeit des Sturm'schen Satzes zu beweisen. Bei der Entwicklung dieses Beweises gehen wir aus von den für die reducirten Sturm'schen Functionen angesetzten Gleichungen (2), nemlich

(2*)
$$\begin{aligned} T(x) &= (\beta_1 x + \beta_1')\, T_1(x) - T_2(x), \\ T_1(x) &= (\beta_2 x + \beta_2')\, T_2(x) - T_3(x), \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ T_{r-2}(x) &= (\beta_{r-1} x + \beta_{r-1}')\, T_{r-1}(x) - T_r(x). \end{aligned}$$

Die Function $T_i(x)$ ist vom Grade $r - i$. Sie hat die Eigenschaft, daß

(75)
$$\sum_{k=1}^{r} \frac{x_k^{\nu}\, T_i(x_k)}{T'(x_k)\, T_1(x_k)} = 0$$

ist für jedes ganze ν, welches die Bedingung erfüllt: $r - i > \nu \geqq 0$. In

*) Comptes rendus, T. 68, p. 1318: Sur les fonctions de Sturm. Note de M. F. Brioschi.

der Tat ist die letzte Gleichung erfüllt für $i = 0$, d. h. wenn man $T(x)$ statt $T_i(x)$ schreibt, denn es ist $T(x_k) = 0$ für $k = 1, 2, 3, \ldots r$. Ferner reducirt sich die Gleichung (75) für $i = 1$ auf die folgende

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{x_k^\nu}{T'(x_k)} = 0,$$

deren linke Seite sich in Determinantenform so schreiben läßt:

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_r \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \ldots & x_r^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ x_1^{r-2} & x_2^{r-2} & x_3^{r-2} & \ldots & x_r^{r-2} \\ x_1^\nu & x_2^\nu & x_3^\nu & \ldots & x_r^\nu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_r \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \ldots & x_r^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ x_1^{r-2} & x_2^{r-2} & x_3^{r-2} & \ldots & x_r^{r-2} \\ x_1^{r-1} & x_2^{r-1} & x_3^{r-1} & \ldots & x_r^{r-1} \end{vmatrix}}$$

Der Nenner dieses letzten Ausdruckes ist das Product der combinatorisch gebildeten Differenzen von je zweien der Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_r$ (**Baltzer**, §. 10, 1.) und folglich von Null verschieden, da diese Wurzeln von einander verschieden vorausgesetzt sind. Der Zähler ist aber identisch gleich Null für $\nu = 0, 1, 2, \ldots r-2$. Demnach ist die Gleichung (75) bewiesen für $i = 1$ und $r-1 > \nu \geq 0$. Aus der ersten der Gleichungen (2*) ergibt sich dann, daß dieselbe Gleichung (75) noch weiter gültig ist für $i = 2$ und $r-2 > \nu \geq 0$. Geht man der Reihe nach zu den übrigen Gleichungen (2*) über und wiederholt den letzten Schluß, so ergibt sich die Allgemeingültigkeit der Gleichung (75) für $r \geq i \geq 0$ und $r - i > \nu \geq 0$.

Für zwei verschiedene ganze Zahlen h und i, die der äußersten Werte 0 und r fähig sind, hat man dann ohne weiteres

$$(76) \qquad \sum_{k=1}^{r} \frac{T_h(x_k)\, T_i(x_k)}{T'(x_k)\, T_1(x_k)} = 0.$$

Denn man darf $h < i$ voraussetzen. Zerlegt man dann $T_h(x)$ in die einzelnen Summanden des Polynoms, so geht die linke Seite der letzten

Gleichung in eine Summe von Bestandteilen über, von denen jeder einzelne nach Gleichung (75) den Wert Null hat.

Zur Abkürzung soll nun weiter

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{T_i(x_k)\,T_i(x_k)}{T'(x_k)\,T_1(x_k)} = S'_i \tag{77}$$

gesetzt werden.

Multiplicirt man in den Gleichungen

$$T_{i-1}(x_k) = (\beta_i x_k + \beta'_i)\,T_i(x_k) - T_{i+1}(x_k),$$
$$T_i(x_k) = (\beta_{i+1} x_k + \beta'_{i+1})\,T_{i+1}(x_k) - T_{i+2}(x_k)$$

auf beiden Seiten resp. mit $T_{i+1}(x_k)$ und mit $T_i(x_k)$ und summirt von $k=1$ bis $k=r$, so erhält man

$$S'_{i+1} = \beta_i \sum_{k=1}^{r} x_k \frac{T_i(x_k)\,T_{i+1}(x_k)}{T'(x_k)\,T_1(x_k)},$$
$$S'_i = \beta_{i+1} \sum_{k=1}^{r} x_k \frac{T_i(x_k)\,T_{i+1}(x_k)}{T'(x_k)\,T_1(x_k)}.$$

Daraus ergibt sich

$$\beta_i S'_i = \beta_{i+1} S'_{i+1},$$

und folglich, da $\beta_1 S'_1 = 1$ ist:

$$S'_i = \frac{1}{\beta_i}.\text{*)} \tag{78}$$

Multiplicirt man ferner in der Gleichung

$$T_{i-1}(x_k) = (\beta_i x_k + \beta'_i)\,T_i(x_k) - T_{i+1}(x_k)$$

auf beiden Seiten mit $T_i(x_k)$ und summirt von $k=1$ bis $k=r$, so ergibt sich:

$$0 = \beta_i \sum_{k=1}^{r} x_k \frac{T_i(x_k)\,T_i(x_k)}{T'(x_k)\,T_1(x_k)} + \beta'_i S'_i,$$

d. h. es ist

$$-\sum_{k=1}^{r} x_k \frac{T_i(x_k)\,T_i(x_k)}{T'(x_k)\,T_1(x_k)} = \frac{\beta'_i}{\beta_i\,\beta_i}. \tag{79}$$

Multiplicirt man endlich auf beiden Seiten der Gleichung

$$T_{i-1}(x_k) = (\beta_i x_k + \beta'_i)\,T_i(x_k) - T_{i+1}(x_k)$$

mit $T_h(x_k)$ und summirt von $k=1$ bis $k=r$, so ergibt sich für Werte von h und i, die um mehr als 1 von einander abweichen:

---

*) Die Gleichungen (75), (76), (78) sind auf dem oben eingeschlagenen Wege von Kronecker bewiesen. Comptes rendus, T. 68, p. 1078.

$$\beta_i \sum_{k=1}^{r} x_k \frac{T_h(x_k)\, T_i(x_k)}{T'(x_k)\, T_1(x_k)} = 0,$$

d. h. es ist

(80)
$$\sum_{k=1}^{r} x_k \frac{T_h(x_k)\, T_i(x_k)}{T'(x_k)\, T_1(x_k)} = 0,$$

wenn $(h-i)^2 > 1$.

Nach dieser Vorbereitung setzen wir in der Formel (70)

$$\rho_1(x) = 1, \ldots \rho_n(x) = q_1, \; q_{n-1};$$
$$\pi(x) = T'(x), \quad \omega(x) = T_1(x), \quad a = 1$$

und bemerken, daß jetzt nach (5*)

$$\rho_n(x_k) = \frac{T_n(x_k)}{T_1(x_k)}.$$

Hieraus ergibt sich für den vorliegenden Fall

$$A_{ns} = x \sum_{k=1}^{r} \frac{T_n(x_k)\, T_s(x_k)}{T'(x_k)\, T_1(x_k)} - \sum_{k=1}^{r} x_k \frac{T_n(x_k)\, T_s(x_k)}{T'(x_k)\, T_1(x_k)}.$$

Mit Hülfe der Gleichungen (76) bis (80) zieht sich dies weiter zusammen. Man erhält

erstens für $n = s$ [nach (78) und (79)]:

$$A_{nn} = \frac{x}{\beta_n} + \frac{\beta'_n}{\beta_n \beta_n} = \frac{q_n}{\beta_n \beta_n};$$

zweitens für $s = n + 1$:

$$A_{n\,\overline{n+1}} = A_{\overline{n+1}\,n} = \frac{S_{n+1}}{\beta_n} = \frac{1}{\beta_n \beta_{n+1}};$$

drittens für Werte von n und s, die um mehr als die Einheit von einander abweichen:

$$A_{ns} = 0.$$

Setzt man diese Werte in die Determinante m_{nn} ein und schafft aus derselben die Nenner weg, so ergibt sich

$$m_{nn} = \frac{1}{\beta_1^2 \beta_2^2 \cdots \beta_n^2} \begin{vmatrix} q_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & q_2 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & q_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & q_n \end{vmatrix}.$$

Die letzte Determinante ist aber nach einem bekannten Satze (Hattendorff, Determinanten §. 23) gleich dem Zähler q_1, q_n. Folglich haben wir hier

$$(81) \qquad m_{nn} = \frac{q_1, q_n}{\beta_1^2 \beta_2^2 \ldots \beta_n^2}.$$

IV. Man setze in der Formel (70) wie vorher

$$\rho_1(x) = 1, \ldots \rho_n(x) = q_1, q_{n-1};$$

$$\pi(x) = T'(x), \quad \omega(x) = T_1(x),$$

aber jetzt $a = -1$. Danach erhält man

$$A_{ns} = \sum_{k=1}^{r} \frac{T_n(x_k)\, T_s(x_k)}{T'(x_k)\, T_1(x_k)} \cdot \frac{1}{x - x_k}.$$

Dieselbe Summe, welche hier A_{ns} ausdrückt, kommt aber auch bei einer Zerlegung in Partialbrüche zu Stande. Es ist nemlich

$$\frac{T_n(x) \,.\, q_1, q_{s-1}}{T(x)} = A_{ns},$$

wenn $n + 1 > s$. Dagegen hat man

$$\frac{T_n(x) \,.\, q_1, q_{s-1}}{T(x)} - \Psi_{ns} = A_{ns},$$

wenn $s \geqq n + 1$ ist. In diesem letzteren Falle bedeutet Ψ_{ns} die ganze Function vom $(s-n-1)$ten Grade, welche bei der vorgeschriebenen Division als Quotient zu Stande kommt. Für $s = n + 1$ ist noch anzumerken, daß $\Psi_{n\,\overline{n+1}}$ eine Constante und zwar gleich 1 ist. Denn es ergibt sich unmittelbar aus den Gleichungen (2*), daß der höchste Coefficient in q_1, q_n gleich dem Producte $\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n$ und der höchste Coefficient in $T_n(x)$ gleich dem reciproken Werte dieses Productes ist.

Hiernach erhalten wir

$$m_{nn} = \frac{1}{T(x)} \begin{vmatrix} T_1 & T_1 \cdot q_1, q_1 - \Psi_{12} & T_1 \cdot q_1, q_2 - \Psi_{13} \ldots \\ T_2 & T_2 \cdot q_1, q_1 - 0 & T_2 \cdot q_1, q_2 - \Psi_{23} \ldots \\ T_3 & T_3 \cdot q_1, q_1 - 0 & T_3 \cdot q_1, q_2 - 0 \quad \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \ldots \\ T_n & T_n \cdot q_1, q_1 - 0 & T_n \cdot q_1, q_2 - 0 \quad \ldots \end{vmatrix}$$

oder kürzer

$$m_{nn} = \frac{1}{T(x)} \begin{vmatrix} T_1 & -1 & -\Psi_{13} & \dots & -\Psi_{1n} \\ T_2 & 0 & -1 & \dots & -\Psi_{2n} \\ T_3 & 0 & 0 & \dots & -\Psi_{3n} \\ . & . & . & \dots & . \\ T_{n-1} & 0 & 0 & \dots & -1 \\ T_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

und dies zieht sich weiter zusammen zu

$$(82) \qquad m_{nn} = \frac{T_n(x)}{T(x)} = \frac{F_n(x)}{F(x)}.$$

V. Wenn man in den Formeln (70) und (71) für a nicht eine ungerade Zahl nimmt, sondern $a = 0$, so hat das auf die Vorzeichen in der quadratischen Form denselben Einfluß, als ob man x größer als die größte reelle Wurzel gesetzt hätte. Dadurch gelangt man zu einem Schluß auf die Gesammtzahl der reellen Wurzeln.

Es sei also wie vorher

$$\rho_1(x) = 1, \dots \rho_n(x) = q_1, q_{n-1};$$
$$\pi(x) = T'(x), \quad \omega(x) = T_1(x),$$

aber jetzt $a = 0$. Dann ergibt sich

$$A_{ns} = \sum_{k=1}^{r} \frac{T_n(x_k)\, T_s(x_k)}{T'(x_k)\, T_1(x_k)}.$$

Beachtet man aber die Gleichungen (76) und (78), so erkennt man, daß

$$A_{ns} = 0 \quad \text{für} \quad n \gtrless s,$$
$$A_{nn} = \frac{1}{\beta_n}$$

ist. Folglich wird hier

$$(83) \qquad m_{nn} = \frac{1}{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \beta_n},$$

und wir kommen auf den Satz des §. 2 (Seite 8 unten und Seite 9 oben) zurück. Man vergleiche hierüber die beiden Abhandlungen von Kronecker (Comptes rendus, T. 68, p. 1078) und Brioschi (Comptes rendus, T. 68, p. 1318).

§. 22.

Die Methode Hermite's, nach welcher unendlich viele Systeme von Functionen hergestellt werden, die den Sturm'schen äquivalent sind,

bietet noch den wesentlichen Vorteil, daß sie sich auf mehrere Gleichungen mit mehreren Unbekannten ausdehnen läßt. Das Princip der Behandlung soll hier für zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten entwickelt werden, da diese für die Aufsuchung der complexen Wurzeln einer Gleichung $F(x) = 0$ von besonderem Interesse sind.

Es seien

$$\lambda(x, y) = 0, \quad \mu(x, y) = 0$$

zwei algebraische Gleichungen und

$$x_1, y_1; \; x_2, y_2; \; \ldots \; x_r, y_r$$

die r Systeme ihrer simultanen Wurzeln. Wir bezeichnen mit $\pi(x, y)$, $\omega(x, y)$ zwei Polynome, die für jedes System simultaner reeller Wurzeln von $\lambda = 0$, $\mu = 0$ dasselbe Vorzeichen haben, mit a und b zwei positive oder negative ungerade ganze Zahlen und mit $\rho_1(x, y)$, $\rho_2(x, y), \ldots \rho_r(x, y)$ rationale ganze Functionen von x und y. Die Coefficienten der sämmtlichen Functionen sollen reell sein.

Wir betrachten die quadratische Form

$$f = \sum_{n=1}^{r} \sum_{s=1}^{r} A_{n,s} u_n u_s, \tag{84}$$

in welcher

$$A_{n,s} = \sum_{k=1}^{r} (x - x_k)^a (y - y_k)^b \cdot \frac{\omega(x_k, y_k)}{\pi(x_k, y_k)} \cdot \rho_n(x_k, y_k) \cdot \rho_s(x_k, y_k) \tag{85}$$

ist und für x und y nur reelle Werte gesetzt werden sollen. Sind

$$\left.\begin{matrix} x_1, & x_1 \\ x_{c+1}, & y_{c+1} \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x_2, & y_2 \\ x_{c+2}, & y_{c+2} \end{matrix}\right\}, \; \ldots \; \left.\begin{matrix} x_c, & y_c \\ x_{2c}, & y_{2c} \end{matrix}\right\}$$

c Paare conjugirter complexer Lösungen und die übrigen Lösungen reell, so gelangen wir auf dem im §. 20 vorgezeichneten Wege zu dem Ausdrucke

$$f = \sum_{p=1}^{r} \frac{2}{\alpha_p (l_p^2 + m_p^2)} \cdot \left\{(\alpha_p P_p + \beta_p Q_p)^2 - (\alpha_p^2 + \beta_p^2) Q_p^2\right\}$$

$$+ \sum_{k=2c+1}^{r} (x - x_k)^a (y - y_k)^b \cdot \frac{\omega(x_k, y_k)}{\pi(x_k, y_k)} \cdot [u_1 \rho_1(x_k, y_k) + \cdots + u_r \rho_r(x_k, y_k)]^2,$$

in welchem P_p und Q_p lineäre Functionen von $u_1, u_2, \ldots u_r$ sind mit reellen Coefficienten. Man sieht daher, daß die Coefficienten $A_{n,s}$ sämmtlich reell sind. Mit Hülfe der lineären reellen Substitutionen

$$\left.\begin{aligned} v_p &= \alpha_p P_p + \beta_p Q_p \\ v_{c+p} &= Q_p \end{aligned}\right\} \text{für } p = 1, 2, \ldots c,$$

$$v_k = u_1 \rho_1 (x_k, y_k) + u_2 \rho_2 (x_k, y_k) + \ldots + u_r \rho_r (x_k, y_k),$$

geht also (75) über in die neue Form

$$f = \sum_{p=1}^{c} \frac{2}{\alpha_p (l_p^2 + m_p^2)} \cdot \left\{ v_p^2 - (\alpha_p^2 + \beta_p^2) v_{c+p}^2 \right\}$$

$$+ \sum_{k=2c+1}^{r} (x - x_k)^a (y - y_k)^b \cdot \frac{\omega (x_k, y_k)}{\pi (x_k, y_k)} \cdot v_k^2,$$

auf welche die §§. 17, 18, 19 Anwendung finden.

Daher der Satz:

Sind h und k reelle Zahlen, so stimmt für $x = h$, $y = k$ die Anzahl der Zeichenfolgen in der Zeichenreihe der Functionen (§. 18)

$$1, \quad m_{1,1}, \quad m_{2,2}, \quad \ldots \quad m_{r,r}$$

oder der Functionen (§. 19)

$$1, \quad H_1, \quad H_2, \quad \ldots \quad H_r$$

überein mit der Anzahl der Paare von simultanen complexen Lösungen der Gleichungen $\lambda = 0$, $\mu = 0$, vermehrt um die Anzahl der reellen Lösungen, welche gleichzeitig grösser oder kleiner als resp. h und k sind.

Und die Anzahl der Zeichenwechsel stimmt überein mit der Anzahl der Paare von simultanen complexen Lösungen, von denen die eine grösser als h, die andere kleiner als k ist oder umgekehrt.

Sind daher h, k, h_1, k_1 reelle Zahlen, $h_1 > h$, $k_1 > k$ und bezeichnet (h, k) die Anzahl der Zeichenfolgen in den obigen Zeichenreihen für $x = h$, $y = k$, so ist

$$\tfrac{1}{2} [(h, k) + (h_1, k_1) - (h, k_1) - (h_1, k)]$$

die Anzahl der reellen Lösungen, welche zugleich grösser als h, k und kleiner als h_1, k_1 sind. (Satz von Hermite.)

Um aus den unendlich vielen Systemen von Functionen, welche hiernach zur Aufsuchung der Wurzeln dienen können, einige besonders hervorzuheben, setzen wir

$$a = b = 1$$

$$\rho_n (x, y) = x^{\alpha - n + 1} y^{n-1}$$

$$\pi (x, y) = \lambda' (x) \,.\, \mu' (y) - \lambda' (y) \,.\, \mu' (x)$$

und

$$S_{i,j} = \sum_{k=1}^{r} \frac{x_k^{j-i}\, y_k^i\, \omega(x_k, y_k)}{\pi(x_k, y_k)}.$$

Dann ist

$$A_{n,s} = xy\, S_{\beta-2,\, 2\alpha} - y\, S_{\beta-2,\, 2\alpha+1} - x\, S_{\beta-1,\, 2\alpha+1} + S_{\beta-1,\, 2\alpha+2}$$

für $\beta = n + s$.

Die Berechnung der Functionen $S_{i,j}$ hat Jacobi in seinem Aufsatze: Theoremata nova algebraica (Crelle, Bd. 14) angegeben.

Für $\omega(x, y) = \pi(x, y)$ wird $S_{i,j} = \sum_{k=1}^{r} x_k^{j-i}\, y_k^i$. Setzen wir noch

$$\rho_n(x, y) = y^{n-1}$$

$$S_i = y_1^i + y_2^i + \ldots + y_r^i,$$

$$T_i = x_1 y_1^i + x_2 y_2^i + \ldots + x_r y_r^i,$$

so wird

$$A_{n,s} = y\,(x\, S_{n+s-2} - T_{n+s-2}) - (x\, S_{n+s-1} - T_{n+s-1})$$

folglich *)

$$m_{n,n} = \begin{vmatrix} x S_0 - T_0 & x S_1 - T_1 & \ldots & x S_n - T_n \\ x S_1 - T_1 & x S_2 - T_2 & \ldots & x S_{n+1} - T_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x S_{n-1} - T_{n-1} & x S_n - T_n & \ldots & x S_{2n-1} - T_{2n-1} \\ 1, & y, & \ldots & y^n \end{vmatrix}$$

§. 23.

Der Sturm'sche Satz läßt sich auch auf transscendente Gleichungen ausdehnen. Es sei $F(x) = 0$ eine transscendente Gleichung und $F(x)$ eine unendliche Reihe, nach steigenden Potenzen von x geordnet. Mit Hülfe der ebenfalls nach steigenden Potenzen von x geordneten ersten Derivirten $F'(x)$ leiten wir die folgenden Gleichungen ab:

---

*) Hermite, Sur l'extension du théorème de M. Sturm. (Comptes rendus, T. 35, p. 52.) Ueber die oben gegebene Darstellung von Hermite's Methode vgl. Brioschi, Sur les séries qui donnent le nombre des racines réelles des équations algébriques. (Nouvelles Annales de Mathématiques, T. 15, p. 264.) Hermite erweitert seine Untersuchungen auch auf Gleichungen mit complexen Coefficienten. (Lettre à Mr. Borchardt de Berlin sur le nombre des racines d'une équation algébrique comprises entre des limites données. Crelle, Journal Bd. 52, p. 39.)

$$\begin{aligned}
F(x) &= (\gamma_1 + \gamma_1' x)\, F'(x) - x^2 F_2(x) \\
F'(x) &= (\gamma_2 + \gamma_2' x)\, F_2(x) - x^2 F_3(x) \\
F_2(x) &= (\gamma_3 + \gamma_3' x)\, F_3(x) - x^2 F_4(x) \\
&\quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
F_{r-2}(x) &= (\gamma_{r-1} + \gamma_{r-1}' x)\, F_{r-1}(x) - x^2 F_r(x)
\end{aligned}$$

Diese Entwicklung setzen wir bis zu einer Function $F_r(x)$ fort, von der bekannt ist, daß sie zwischen $x = a$ und $x = b$ ihr Vorzeichen nicht ändert. Alsdann gilt für Werte der Variabeln zwischen a und b von den Functionen $F(x)$, $F'(x)$, $F_2(x), \ldots F_r(x)$ der Sturm'sche Satz*).

---

*) Stern, Ueber die Anwendung der Sturm'schen Methode auf transscendente Gleichungen (Crelle, Journal Bd. 33, p. 363).



Math 2288.74
Die sturm'schen Functionen /
Cabot Science
003273811
3 2044 091 873 364